

디랙 델타 함수

$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$ 과 충격 입력에 대한 응답

공학수학 I · 강의노트 §4.5 Example 풀이

1 $y'' + y = 4\delta(t - 2\pi), y(0) = 1, y'(0) = 0$

$$(s^2 + 1)Y - s = 4e^{-2\pi s} \Rightarrow Y = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}.$$

$\sin(t - 2\pi) = \sin t$ 이므로

답

$$y = \cos t + 4 \sin t \mathcal{U}(t - 2\pi) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < 2\pi \\ \cos t + 4 \sin t, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

$t = 2\pi$ 에서 y 는 연속이고 y' 만 4만큼 쏠린다. 크기 4인 충격이 속도를 순간적으로 바꾼 것이다(그림 1 왼쪽).

2 주어진 초기조건으로 풀기

(1) $y' - 3y = \delta(t - 2), y(0) = 0$: $(s - 3)Y = e^{-2s}, Y = \frac{e^{-2s}}{s - 3}.$

답

$$y = e^{3(t-2)} \mathcal{U}(t - 2)$$

(2) $y'' + y = \delta(t - 2\pi), y(0) = 0, y'(0) = 1$: $Y = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}.$

답

$$y = \sin t + \sin t \mathcal{U}(t - 2\pi) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 2 \sin t, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

(3) $y'' + y = \delta(t - \frac{\pi}{2}) + \delta(t - \frac{3\pi}{2}), y(0) = y'(0) = 0$: $Y = \frac{e^{-\pi s/2} + e^{-3\pi s/2}}{s^2 + 1}, \sin(t - \frac{\pi}{2}) = -\cos t, \sin(t - \frac{3\pi}{2}) = \cos t$ 이므로

답

$$y = -\cos t \mathcal{U}(t - \frac{\pi}{2}) + \cos t \mathcal{U}(t - \frac{3\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ -\cos t, & \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & t \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

비고. (3)에서 첫 충격이 진동을 시작시키고, 두 번째 충격은 정확히 반 주기 뒤 속도가 -1인 순간에 +1을 더해 진동을 완전히 멈춘다(그림 1 오른쪽).

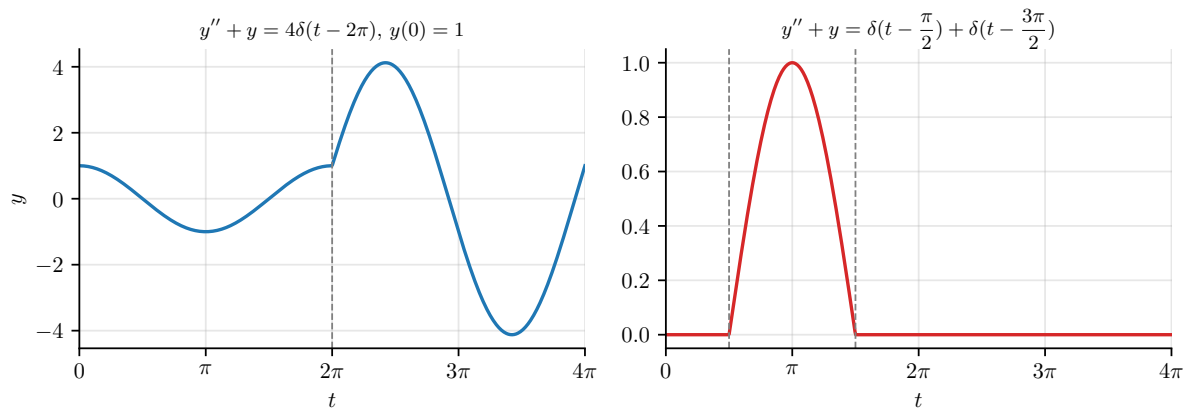


그림 1: 충격 입력에 대한 응답. 점선은 충격이 가해지는 시각이다.