

연립 선형 미분방정식

라플라스 변환으로 연립 대수방정식 만들기

공학수학 I · 강의노트 §4.6 Example 풀이

1 이중 진자

$m_1 = 3, m_2 = 1, l_1 = l_2 = 5, g = 10$ 을 넣고 각 식을 5로 나누면

$$4\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 8\theta_1 = 0, \quad \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2\theta_2 = 0.$$

$\theta_1(0) = 1, \theta_2(0) = -1, \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ 으로 변환하면

$$4(s^2\Theta_1 - s) + (s^2\Theta_2 + s) + 8\Theta_1 = 0 \Rightarrow (4s^2 + 8)\Theta_1 + s^2\Theta_2 = 3s,$$

$$(s^2\Theta_1 - s) + (s^2\Theta_2 + s) + 2\Theta_2 = 0 \Rightarrow s^2\Theta_1 + (s^2 + 2)\Theta_2 = 0.$$

계수행렬식은 $(4s^2 + 8)(s^2 + 2) - s^4 = 3s^4 + 16s^2 + 16 = (3s^2 + 4)(s^2 + 4)$ 이므로

$$\Theta_1 = \frac{3s(s^2 + 2)}{(3s^2 + 4)(s^2 + 4)} = \frac{1}{4} \frac{s}{s^2 + \frac{4}{3}} + \frac{3}{4} \frac{s}{s^2 + 4}, \quad \Theta_2 = \frac{-3s^3}{(3s^2 + 4)(s^2 + 4)} = \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + \frac{4}{3}} - \frac{3}{2} \frac{s}{s^2 + 4}.$$

답

$$\theta_1(t) = \frac{1}{4} \cos \frac{2}{\sqrt{3}}t + \frac{3}{4} \cos 2t, \quad \theta_2(t) = \frac{1}{2} \cos \frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{3}{2} \cos 2t$$

진자는 두 고유진동수 $\omega_1 = 2/\sqrt{3}, \omega_2 = 2$ 의 진동이 겹쳐서 움직인다(그림 1). 두 진동수의 비가 무리수이므로 운동은 주기적이지 않다.

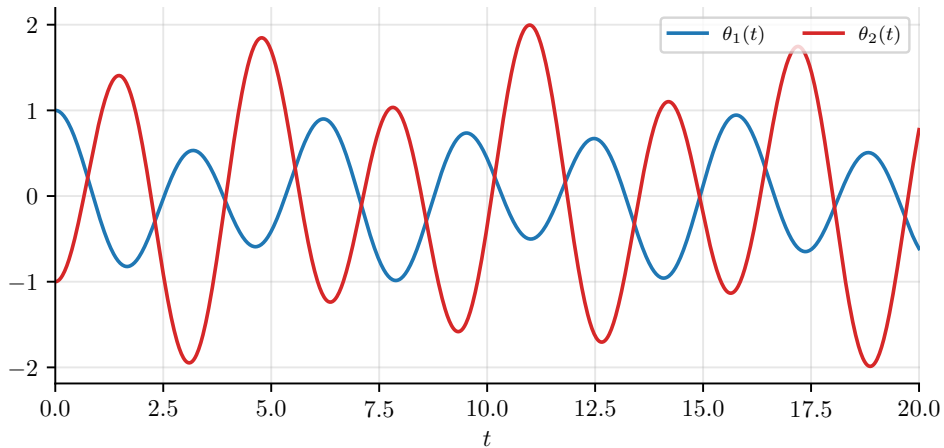


그림 1: 이중 진자의 각변위(수치해와 일치함을 확인함).

2 연립방정식

(1) $\dot{x} = -x + y, \dot{y} = 2x, x(0) = 0, y(0) = 1$: $(s+1)X - Y = 0, -2X + sY = 1, X = \frac{1}{(s+2)(s-1)}, Y = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)}.$

답

$$x = \frac{1}{3} (e^t - e^{-2t}), \quad y = \frac{2}{3} e^t + \frac{1}{3} e^{-2t}$$

(2) $\dot{x} = x - 2y, \dot{y} = 5x - y, x(0) = -1, y(0) = 2$: $(s-1)X + 2Y = -1, -5X + (s+1)Y = 2$, 행렬식 $s^2 + 9$. $X = \frac{-s-5}{s^2+9}, Y = \frac{2s-7}{s^2+9}$.

답

$$x = -\cos 3t - \frac{5}{3} \sin 3t, \quad y = 2 \cos 3t - \frac{7}{3} \sin 3t$$

(3) $2\dot{x} + \dot{y} - 2x = 1, \dot{x} + \dot{y} - 3x - 3y = 2, x(0) = y(0) = 0$:

$$(2s-2)X + sY = \frac{1}{s}, \quad (s-3)X + (s-3)Y = \frac{2}{s}.$$

둘째 식에서 $X + Y = \frac{2}{s(s-3)}$. 첫째 식에서 $sY = s(X + Y) - sX$ 를 쓰면 $(s-2)X = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-3} = \frac{-s-3}{s(s-3)}$ 이므로

$$X = -\frac{s+3}{s(s-2)(s-3)} = -\frac{1}{2s} + \frac{5}{2(s-2)} - \frac{2}{s-3}, \quad Y = \frac{2}{s(s-3)} - X = -\frac{1}{6s} - \frac{5}{2(s-2)} + \frac{8}{3(s-3)}.$$

답

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}e^{2t} - 2e^{3t}, \quad y = -\frac{1}{6} - \frac{5}{2}e^{2t} + \frac{8}{3}e^{3t}$$