베셀 함수

베셀 방정식과 그 변형, 반홀수 차수, 재귀 관계, 노화 스프링

공학수학 I · 강의노트 §5.3.1 Example 풀이

1 기본 베셀 방정식

(1) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$: $\nu = \frac{1}{2}$이고 $2\nu = 1$이지만 ν가 반홀수이므로 $J_{1/2}$, $J_{-1/2}$는 일차독립이다.

> **답**
> $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\,(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$

(2) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0$: $\nu = 3$ (정수)이므로 $J_{-3} = -J_3$이 되어 Y_3를 써야 한다.

> **답**
> $y = c_1 J_3(x) + c_2 Y_3(x)$

2 $J_0'(x) = -J_1(x)$

$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$에 $\nu = 0$을 넣으면 바로 $J_0'(x) = -J_1(x)$. 급수로 확인하면

$$J_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2n}{(n!)^2} \frac{x^{2n-1}}{2^{2n}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = -J_1(x).$$

3 $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$

$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$ (노트의 $\Gamma(\frac{3}{2} + n)$ 공식과 같은 방법)이므로

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\frac{1}{2} + n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x^{2n-1/2}}{2^{2n-1/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

4 $(0, \infty)$에서의 일반해

(1) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$: $\nu = \frac{1}{3}$, 2ν가 정수가 아니다. $\quad y = c_1 J_{1/3}(x) + c_2 J_{-1/3}(x)$

(2) $xy'' + y' + xy = 0$: x를 곱하면 $\nu = 0$인 베셀 방정식. $\quad y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$

(3) $x^2y'' + xy' + (9x^2 - 4)y = 0$: 매개변수 베셀 방정식, $\alpha = 3$, $\nu = 2$. $\quad y = c_1 J_2(3x) + c_2 Y_2(3x)$

(4) $x^2y'' + xy' - (16x^2 + \frac{4}{9})y = 0$: $t = 4x$로 두면 변형 베셀 방정식 $t^2y'' + ty' - (t^2 + \frac{4}{9})y = 0$, $\nu = \frac{2}{3}$.
$y = c_1 I_{2/3}(4x) + c_2 K_{2/3}(4x)$

5 치환이 필요한 경우

(1) $x^2y'' + 2xy' + \alpha^2x^2y = 0$, $y = x^{-1/2}u$. $y' = x^{-1/2}u' - \frac{1}{2}x^{-3/2}u$, $y'' = x^{-1/2}u'' - x^{-3/2}u' + \frac{3}{4}x^{-5/2}u$를 넣고 $x^{-1/2}$로 나누면

$$x^2u'' + xu' + \left(\alpha^2x^2 - \tfrac{1}{4}\right)u = 0 \;\Rightarrow\; u = c_1J_{1/2}(\alpha x) + c_2J_{-1/2}(\alpha x).$$

답

$$y = x^{-1/2}\left[c_1J_{1/2}(\alpha x) + c_2J_{-1/2}(\alpha x)\right] = C_1\frac{\sin\alpha x}{x} + C_2\frac{\cos\alpha x}{x}$$

(2) $xy'' + 2y' + 4y = 0$, 즉 $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{4}{x}y = 0$. 노트의 "또 다른 방정식"

$$y'' + \frac{1-2a}{x}y' + \left(b^2c^2x^{2c-2} + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2}\right)y = 0$$

과 비교하면 $1-2a = 2$, $2c-2 = -1$, $b^2c^2 = 4$, $a^2 - p^2c^2 = 0$에서 $a = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$, $b = 4$, $p = 1$.

답

$$y = x^{-1/2}\left[c_1J_1(4\sqrt{x}) + c_2Y_1(4\sqrt{x})\right]$$

6 $I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix)$는 실함수

$$J_\nu(ix) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(1+\nu+n)}\left(\frac{ix}{2}\right)^{2n+\nu} = i^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,i^{2n}}{n!\,\Gamma(1+\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}.$$

$(-1)^n i^{2n} = (-1)^n(-1)^n = 1$이므로

$$I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,\Gamma(1+\nu+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

이고, 각 항이 실수이므로 $x > 0$에서 I_ν는 실함수이다(게다가 모든 항이 양수이므로 $I_\nu(x) > 0$).

7 변형 베셀 함수로: $xy'' + y' - 7x^3y = 0$

$y'' + \frac{1}{x}y' - 7x^2y = 0$을 위 공식과 비교하면 $1-2a = 1$, $2c-2 = 2$, $b^2c^2 = -7$, $a^2 - p^2c^2 = 0$에서 $a = 0$, $c = 2$, $p = 0$, $b = \frac{\sqrt{7}}{2}i$. $y = c_1J_0\left(\frac{\sqrt{7}}{2}ix^2\right) + c_2Y_0\left(\frac{\sqrt{7}}{2}ix^2\right)$이고, $J_0(it) = I_0(t)$이므로 실함수로 쓰면

답

$$y = c_1I_0\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x^2\right) + c_2K_0\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x^2\right)$$

8 초등함수로 쓰기: $x^2y'' + 4xy' + (x^2+2)y = 0$

$y'' + \frac{4}{x}y' + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)y = 0$: $1-2a = 4$, $c = 1$, $b = 1$, $a^2 - p^2 = 2$에서 $a = -\frac{3}{2}$, $p = \frac{1}{2}$.

답

$$y = x^{-3/2}\left[c_1J_{1/2}(x) + c_2J_{-1/2}(x)\right] = C_1\frac{\sin x}{x^2} + C_2\frac{\cos x}{x^2}$$

(직접 대입해 확인할 수 있다. $\sqrt{2/\pi}$는 상수에 흡수했다.)

9 적분 공식과 $J_0' = J_{-1} = -J_1$

$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$에서 $\nu = 1$이면 $\frac{d}{dr}[rJ_1(r)] = rJ_0(r)$. 0부터 x까지 적분하고 $rJ_1(r) \to 0$ $(r \to 0)$을 쓰면

$$\int_0^x rJ_0(r)\,dr = xJ_1(x).$$

같은 공식에서 $\nu = 0$이면 $J_0'(x) = J_{-1}(x)$이고, $J_{-m} = (-1)^m J_m$에서 $J_{-1} = -J_1$.

10 노화 스프링: $m\ddot{x} + ke^{-\alpha t}x = 0$

$s = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha t/2}$로 바꾸면 $\nu = 0$인 베셀 방정식이 되므로 $x(t) = c_1 J_0(s) + c_2 Y_0(s)$. $t \to \infty$이면 $s \to 0^+$이다.

- $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$: $J_0(s) \to 1$이므로 $x(t) \to c_1$. 스프링이 약해지면서 진동이 멈추고 질량은 한 위치로 다가간다.
- $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$: $Y_0(s) \approx \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{s}{2} + \gamma\right)$이고 $\ln s = $ 상수 $- \frac{\alpha t}{2}$이므로 $Y_0(s) \approx -\frac{\alpha}{\pi}t +$ 상수. 즉 $|x(t)| \to \infty$로, 결국 거의 일정한 속도로 멀어진다.
- $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$: $c_2 Y_0$ 항이 지배하므로 두 번째 경우와 같이 $|x(t)| \to \infty$.

비고. 시간이 지나 복원력이 사라지면 질량은 관성만으로 움직인다. 그래서 일반적인 초기조건에서는 마지막 속도를 유지하며 멀어지고, 특별한 경우($c_2 = 0$)에만 정지한다(그림 1).

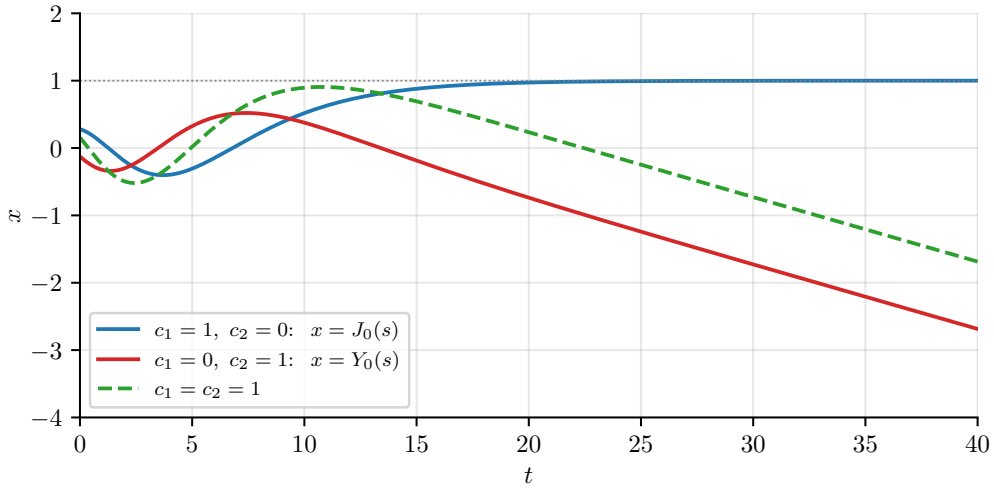

그림 1: $m = k = 1$, $\alpha = 0.3$인 노화 스프링의 해. J_0 해는 1로 수렴하고, Y_0가 섞이면 선형으로 발산한다.