

르장드르 다항식

재귀 관계, 변수 변환 $x = \cos \theta$, 고윳값, 연관 르장드르 함수

공학수학 I · 강의노트 §5.3.2 Example 풀이

1 재귀 관계로 P_2-P_7 만들기

$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$ 에 $n = 1, 2, \dots, 6$ 을 차례로 넣는다.

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2}(3x \cdot x - 1) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3 &= \frac{1}{3}(5xP_2 - 2P_1) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4 &= \frac{1}{4}(7xP_3 - 3P_2) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5 &= \frac{1}{5}(9xP_4 - 4P_3) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \\ P_6 &= \frac{1}{6}(11xP_5 - 5P_4) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5), \\ P_7 &= \frac{1}{7}(13xP_6 - 6P_5) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x). \end{aligned}$$

확인: 모두 $P_n(1) = 1$ (예: $\frac{231-315+105-5}{16} = 1$).

2 $x = \cos \theta$ 로 르장드르 방정식 만들기

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta y_x, \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} = \sin^2 \theta y_{xx} - \cos \theta y_x. \text{ 대입하면}$$

$$\sin \theta (\sin^2 \theta y_{xx} - \cos \theta y_x) - \cos \theta \sin \theta y_x + n(n+1) \sin \theta y = \sin \theta [(1-x^2)y_{xx} - 2xy_x + n(n+1)y] = 0.$$

$\sin \theta \neq 0$ 이면 괄호 안이 르장드르 방정식이다.

3 고윳값 문제: $(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y, y'$ 유계

$\lambda = n(n+1)$ 로 쓰면 르장드르 방정식이다. 급수해는 $|x| < 1$ 에서 수렴하지만, 다항식으로 끝나지 않는 해는 $x = \pm 1$ 에서 유계가 아니다. 따라서 $[-1, 1]$ 에서 유계인 해는 $\lambda = n(n+1)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 일 때의 $P_n(x)$ 뿐이다. 또 $y(0) = 0$ 이어야 하므로 $P_n(0) = 0$, 즉 n 이 홀수여야 한다(n 짝수이면 $P_n(0) \neq 0$).

답

$n = 1, 3, 5: \lambda = 2, 12, 30$ (해는 각각 P_1, P_3, P_5)

4 연관 르장드르 함수

$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ 로 계산한다.

$$\begin{aligned} P_0^0 &= 1, & P_1^0 &= x, & P_1^1 &= (1-x^2)^{1/2}, & P_2^1 &= 3x(1-x^2)^{1/2}, \\ P_2^0 &= 3(1-x^2), & P_3^1 &= \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}, & P_3^2 &= 15x(1-x^2), & P_3^3 &= 15(1-x^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

- m 이 짝수인 경우: $(1-x^2)^{m/2}$ 가 다항식이므로 P_n^m 은 다항식이다(차수 n).
- $m > n$ 인 경우: P_n 은 n 차 다항식이므로 m 번 미분하면 0, 따라서 $P_n^m \equiv 0$.
- $y = P_1^1 = \sqrt{1-x^2}$ 확인 ($n = m = 1$): $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, y'' = -\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$ 이므로

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[2 - \frac{1}{1-x^2}\right]y = \frac{-1+2x^2+2(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$