

행렬 대수

행렬의 곱, 전치, 그리고 실수와 다른 성질들

공학수학 I · 강의노트 §6.1 Example 풀이

1 행렬의 곱

문제. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 일 때 (a) $\mathbf{AB}$, (b) $\mathbf{BA}$, (c) $\mathbf{A}^2$, (d) $\mathbf{B}^2$ 을 구한다.

풀이. (i, j) 성분은 앞 행렬의 i 행과 뒤 행렬의 j 열의 내적이다. 예를 들어 $(\mathbf{AB})_{11} = 2(-1) + (-3)(3) = -11$.

답

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ 17 & -22 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -32 & 27 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 19 & -18 \\ -30 & 31 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 3 & 22 \end{pmatrix}.$$

(a)와 (b)를 비교하면 $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ 이다. 행렬의 곱은 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않는다.

2 $\mathbf{AA}^T$ 는 대칭행렬

문제. $\mathbf{A}$ 가 $m \times n$ 행렬이면 $\mathbf{AA}^T$ 가 대칭임을 보인다.

풀이. $\mathbf{AA}^T$ 는 $m \times m$ 정사각행렬이다. 전치의 성질 $(\mathbf{XY})^T = \mathbf{Y}^T \mathbf{X}^T$, $(\mathbf{X}^T)^T = \mathbf{X}$ 를 쓰면

$$(\mathbf{AA}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T \mathbf{A}^T = \mathbf{AA}^T.$$

따라서 $\mathbf{AA}^T$ 는 대칭이다. (같은 방법으로 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 도 대칭이다.)

3 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 이지만 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$

풀이. 예를 들어

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

더 간단히 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 도 된다. 실수와 달리 “곱이 0이면 어느 하나가 0”이 성립하지 않는다. (§6.6에서 보듯이, $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 이고 둘 다 영행렬이 아니면 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 는 모두 특이행렬이다.)

4 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$

풀이. 분배법칙으로 전개하면

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2.$$

$\mathbf{AB} + \mathbf{BA} = 2\mathbf{AB}$ 가 되려면 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ 이어야 하는데, 이것은 일반적으로 성립하지 않는다. 예: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이면 $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$ 이므로 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이지만 $\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이다.

5 회전

문제. $\mathbf{a} = \langle 1, 1 \rangle$ 을 $\theta = \pi/2$ 만큼 회전한 벡터 $\mathbf{b}$ 를 구한다.

풀이. 반시계 방향 회전은 회전행렬 $\mathbf{M}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 로 나타낸다.

답

$$\mathbf{b} = \mathbf{M}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{2}$ 이므로 길이는 그대로이고 방향만 90° 돌았다.

6 이차형식의 행렬 표현

풀이. 뒤에서부터 곱하면

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax + \frac{b}{2}y \\ \frac{b}{2}x + cy \end{pmatrix} = ax^2 + \frac{b}{2}xy + \frac{b}{2}xy + cy^2 = ax^2 + bxy + cy^2.$$

비고. 계수 b 를 대각선 밖의 두 자리에 반씩 나누어 넣으면 행렬이 대칭이 된다. 대칭으로 쓰는 것이 중요한데, §6.12에서 대칭행렬의 직교 대각화로 이차곡선을 판별할 때 이 표현을 쓴다.