

직교행렬

직교성 판정, 대칭행렬의 고유벡터, 그람-슈미트

공학수학 I · 강의노트 §6.10 Example 풀이

1 직교행렬인지 판정

$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$, 즉 열벡터들이 정규직교(orthonormal)인지 확인한다.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: 열은 $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ 으로 단위벡터이고 서로 수직이다. 직교행렬이다. (첫째·둘째 행을 바꾸는 치환행렬이며 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.)

(2) 열은 $\langle 0, -\frac{12}{13}, \frac{5}{13} \rangle, \langle 0, \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$ 이다. 길이: $\frac{144+25}{169} = 1, \frac{25+144}{169} = 1, 1$. 내적: $\frac{-60+60}{169} = 0$ 이고 나머지는 셋째 열과의 내적이므로 0이다. 직교행렬이다.

2 대칭행렬의 고유벡터와 직교행렬 P

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a), (b)

$$\mathbf{A}\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\mathbf{k}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\mathbf{k}_2, \quad \mathbf{A}\mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\mathbf{k}_3.$$

따라서 세 벡터 모두 고유벡터이고 고윳값은 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$ 이다.

(c) $\mathbf{k}_3$ 은 다른 고윳값에 속하므로 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ 와 이미 수직이다 ($\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3 = 0$). 그러나 같은 고윳값 -2 에 속한 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ 는 $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = 1 \neq 0$ 이므로 그람-슈미트로 직교화한다.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{k}_2 - \frac{\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{k}_3.$$

$\mathbf{v}_2$ 는 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ 의 일차결합이므로 여전히 고윳값 -2 의 고유벡터이다. 각각을 정규화해서 열로 놓으면

답

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3 가정에 근거한 질문들

아래에서는 직교행렬의 정의 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$, 즉 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ 만 쓴다.

1. $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 가 직교행렬이면 $\mathbf{AB}$ 도 직교행렬.

$$(\mathbf{AB})^T(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T \mathbf{IB} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

기하학적으로는 길이와 각을 보존하는 변환(회전·반사)을 두 번 하면 그 결과도 길이와 각을 보존한다는 뜻이다.

2. $\mathbf{A}^2$ 도 직교행렬이다. 1번에서 $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ 로 두면 된다. 귀납적으로 모든 거듭제곱 $\mathbf{A}^m$ ($m = 1, 2, \dots$)이 직교행렬이다.

3. $\mathbf{A}^{-1}$ 도 직교행렬. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ 이고 $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ 이므로

$$(\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^T)^T \mathbf{A}^T = \mathbf{AA}^T = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}.$$

4. 직교행렬이 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ 를 만족하면 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ 의 양변 왼쪽에 $\mathbf{A}^{-1}$ 을 곱하면 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$ 이고, 직교행렬이므로 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. 따라서 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$, 즉 $\mathbf{A}$ 는 대칭이다. (예: 첫 문제 (1)의 치환행렬, 또는 반사행렬 $\begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$.)

5. 회전행렬은 직교행렬. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 이면

$$\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

두 열 $\langle \cos \theta, \sin \theta \rangle, \langle -\sin \theta, \cos \theta \rangle$ 이 서로 수직인 단위벡터라는 뜻이다. 또 $\det \mathbf{M} = 1$ 이므로 반사가 아닌 회전이다.

답

1, 3, 5: $(\mathbf{AB})^T \mathbf{AB} = \mathbf{I}$, $(\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^T = \mathbf{I}$, $\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{I}$. 2: 예 ($\mathbf{B} = \mathbf{A}$ 인 1번). 4: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.