

대각화

대각화 가능성, 직교 대각화, 이차곡선, $\mathbf{A}^m = \mathbf{P}\mathbf{D}^m\mathbf{P}^{-1}$

공학수학 I · 강의노트 §6.12 Example 풀이

1 대각화 가능성 판정

$n \times n$ 행렬은 일차독립인 고유벡터가 n 개 있을 때 대각화 가능하다. 고윳값이 모두 다르면 항상 가능하다.

(1) $\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$: $\lambda^2 + 3\lambda - 28 = (\lambda + 7)(\lambda - 4) = 0$. 서로 다른 고윳값이므로 대각화 가능. $\lambda = -7$: $-2k_1 + 13k_2 = 0 \Rightarrow \langle 13, 2 \rangle$; $\lambda = 4$: $-13k_1 + 13k_2 = 0 \Rightarrow \langle 1, 1 \rangle$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$: 둘째 행으로 전개하면 $(1 - \lambda)[(1 - \lambda)^2 - 1] = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. 고윳값 0, 1, 2가 서로 다르므로 대각화 가능.

$$\lambda = 0: \langle -1, 0, 1 \rangle, \quad \lambda = 1: \langle 1, 1, 1 \rangle, \quad \lambda = 2: \langle 1, 0, 1 \rangle; \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $(1 - \lambda)(\lambda^2 - 5) = 0$, 고윳값 $1, \pm\sqrt{5}$. 대칭행렬이므로 당연히 대각화 가능.

$$\lambda = 1: \langle 0, 0, 1 \rangle, \quad \lambda = \pm\sqrt{5}: \langle 1 \pm \sqrt{5}, 2, 0 \rangle; \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 - \sqrt{5} & 1 + \sqrt{5} \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

(고유벡터 $\langle 1 \pm \sqrt{5}, 2, 0 \rangle$ 은 $\langle \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, 1, 0 \rangle$ 의 2배이다.)

2 대칭행렬의 직교 대각화

서로 다른 고윳값의 고유벡터는 자동으로 수직이므로 정규화만 하면 된다. 중복 고윳값이 있으면 그 고유공간에서 수직인 고유벡터를 고른다.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: $\lambda(\lambda - 2) = 0$.

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $-(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$. $\lambda = -1$: $\langle -1, 1, 0 \rangle$; $\lambda = 1$ (중복도 2): $\langle 1, 1, 0 \rangle, \langle 0, 0, 1 \rangle$ (이미 서로 수직).

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} : (1 - \lambda)[(1 - \lambda)^2 - 49] = 0$, 고윳값 $-6, 1, 8$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

3 이차곡선의 판별

$ax^2 + bxy + cy^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$. 직교행렬 $\mathbf{P}$ 로 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X}$ 로 좌표를 회전하면 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$ 이 된다.

(1) $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 24$: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, 고윳값 $4 \ (\langle 1, 1 \rangle)$, $6 \ (\langle -1, 1 \rangle)$.

$$4X^2 + 6Y^2 = 24 \implies \frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{4} = 1 \quad (\text{타원}).$$

X 축은 $\langle 1, 1 \rangle$ 방향, 즉 45° 회전한 축이다.

(2) $-3x^2 + 8xy + 3y^2 = 20$: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, 고윳값 $-5 \ (\langle -2, 1 \rangle)$, $5 \ (\langle 1, 2 \rangle)$.

$$-5X^2 + 5Y^2 = 20 \implies \frac{Y^2}{4} - \frac{X^2}{4} = 1 \quad (\text{쌍곡선}).$$

Y 축 $\langle 1, 2 \rangle$ 방향 위에 꼭짓점이 있다.

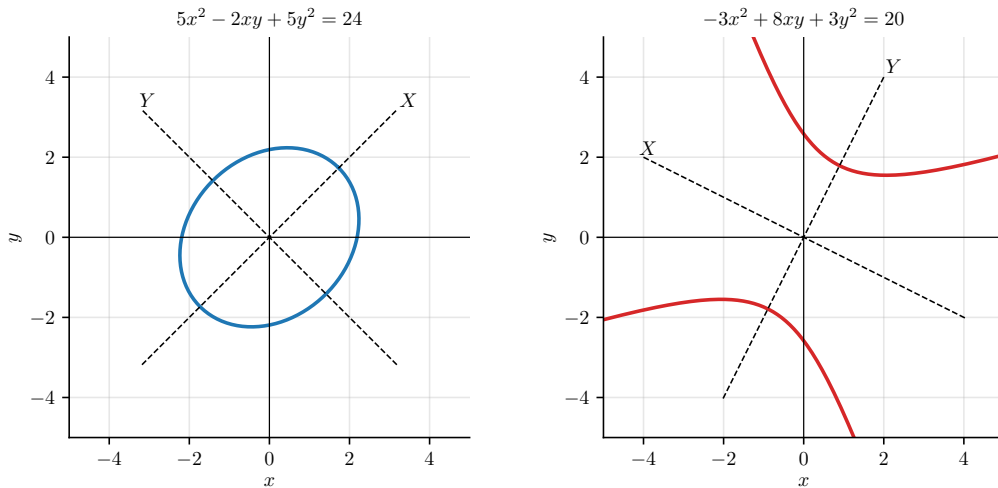


그림 1: 고유벡터 방향의 새 좌표축 X, Y (점선)에서 보면 두 곡선은 표준형이 된다.

비고. 고윳값의 부호가 같으면 타원, 다르면 쌍곡선이다. 즉 $\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2/4$ 의 부호로 판별할 수 있다.

4 주어진 고윳값과 고유벡터를 갖는 대칭행렬

세 고유벡터는 서로 수직이다 ($\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3 = 0$). 정규화한 $\mathbf{u}_i = \mathbf{k}_i / \|\mathbf{k}_i\|$ 를 열로 하는 직교행렬 $\mathbf{P}$ 에 대해 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^T = \sum_i \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$ 이다.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

답

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & 11 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

(확인: $\mathbf{A}\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{k}_2 = 3\mathbf{k}_2$, $\mathbf{A}\mathbf{k}_3 = 5\mathbf{k}_3$.)

5 $\mathbf{A}^m = \mathbf{P}\mathbf{D}^m\mathbf{P}^{-1}$

$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ 에서 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$ 이다. 거듭제곱하면 가운데의 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{I}$ 가 소거된다.

$$\mathbf{A}^m = (\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1})(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}) \cdots (\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{P}\mathbf{D}^m\mathbf{P}^{-1}.$$

(엄밀하게는 수학적 귀납법: $\mathbf{A}^{m+1} = \mathbf{A}^m\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}^m\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D}^{m+1}\mathbf{P}^{-1}$.) $\mathbf{D}^m$ 은 대각성분을 m 제곱만 하면 되므로 계산이 쉽다.

6 거듭제곱 계산

(1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$: 고윳값 -1 ($\langle -1, 2 \rangle$), 2 ($\langle 1, 1 \rangle$).

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^5 = \mathbf{P} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 63 & 33 \\ 66 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 22 & 10 \end{pmatrix}.$$

(2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$: $\lambda^2 - \lambda = 0$, 고윳값 0 ($\langle 5, 3 \rangle$), 1 ($\langle 2, 1 \rangle$). $\mathbf{D}^{10} = \text{diag}(0, 1) = \mathbf{D}$ 이므로

$$\mathbf{A}^{10} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

실제로 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ (멱등행렬)이다.

7 $\mathbf{A}^{-1}$ 도 대각화 가능

$\mathbf{A}$ 가 정칙이면 고윳값이 모두 0이 아니므로 $\mathbf{D}$ 가 정칙이다. $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ 의 양변의 역행렬을 취하면

$$\mathbf{D}^{-1} = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}.$$

$\mathbf{D}^{-1} = \text{diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n)$ 은 대각행렬이므로 같은 $\mathbf{P}$ 가 $\mathbf{A}^{-1}$ 을 대각화한다.

8 $\mathbf{P}$ 는 유일한가?

유일하지 않다.

- 고유벡터에 0이 아닌 상수를 곱해도 고유벡터이므로 $\mathbf{P}$ 의 각 열의 크기(부호)를 바꿀 수 있다.
- 열의 순서를 바꿀 수 있다. 이때 $\mathbf{D}$ 의 대각성분 순서도 같이 바뀐다.
- 중복 고윳값이 있으면 그 고유공간에서 일차독립인 고유벡터를 다르게 고를 수 있다.

예: 위 문제 (1)에서 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 로 해도 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag}(2, -1)$ 이다. 유일하게 정해지는 것은 (순서를 빼면) $\mathbf{D}$, 즉 고윳값들뿐이다.