

LU 분해

둘리틀(Doolittle) 분해와 전진·후진 대입

공학수학 I · 강의노트 §6.13 Example 풀이

1 LU 분해

가우스 소거에서 k 번째 피벗 아래를 0으로 만들 때 쓴 승수 $m_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$ 를 $\mathbf{L}$ 의 (i, k) 성분에 넣고, 소거 결과를 $\mathbf{U}$ 로 둔다 ($\mathbf{L}$ 의 대각성분은 1).

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}: m_{21} = \frac{1}{2}, R_2 - \frac{1}{2}R_1 = \langle 0, 3 \rangle.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}: m_{21} = \frac{2}{-1} = -2, R_2 + 2R_1 = \langle 0, 10 \rangle.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$(3) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 12 & 1 & 3 \end{pmatrix}: m_{21} = -1, m_{31} = 3 \Rightarrow R_2 + R_1 = \langle 0, -1, 3 \rangle, R_3 - 3R_1 = \langle 0, 7, 0 \rangle. \text{ 다음으로 } m_{32} = \frac{7}{-1} = -7 \Rightarrow R_3 + 7R_2 = \langle 0, 0, 21 \rangle.$$

답

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 12 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

2 LU 분해로 연립방정식 풀기

$\mathbf{Ax} = \mathbf{LUx} = \mathbf{b}$ 를 두 단계로 푼다: $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ (전진 대입) $\rightarrow \mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ (후진 대입).

(1) 위의 분해 (1)과 $\mathbf{b} = \langle 1, -2 \rangle$:

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}: y_1 = 1, \frac{1}{2}y_1 + y_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -\frac{5}{2}; \quad \mathbf{Ux} = \mathbf{y}: 3x_2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{6}, 2x_1 - 2x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}.$$

(2) 위의 분해 (3)과 $\mathbf{b} = \langle 7, 7, 28 \rangle$:

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}: y_1 = 7, y_2 = 7 + y_1 = 14, y_3 = 28 - 3y_1 + 7y_2 = 105;$$

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}: 21x_3 = 105 \Rightarrow x_3 = 5, -x_2 + 3x_3 = 14 \Rightarrow x_2 = 1, 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow x_1 = 1.$$

답

$$(1) x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{5}{6} \quad (2) x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 5$$

비고. 분해는 $\mathbf{A}$ 에만 의존하므로 한 번 구해 두면 $\mathbf{b}$ 가 바뀔 때마다 대입 두 번(각각 약 $n^2/2$ 회 연산)으로 풀 수 있다. 소거 전체에는 약 $n^3/3$ 회 연산이 필요하다.