

연립일차방정식

가우스 소거법, 화학 반응식의 균형, 기본행렬

공학수학 I · 강의노트 §6.2 Example 풀이

1 가우스(-조르당) 소거법

첨가행렬 $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ 를 기약 행사다리꼴로 만든다.

(1) $x_1 - x_2 = 11, 4x_1 + 3x_2 = -5$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 11 \\ 4 & 3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{-4R_1+R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 11 \\ 0 & 7 & -49 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{7}R_2, R_2+R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -7 \end{array} \right)$$

해: $x_1 = 4, x_2 = -7$.

(2) $9x_1 + 3x_2 = -5, 2x_1 + x_2 = -1$: 같은 방법으로 $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right)$. 해: $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}$.

(3) $x_1 - x_2 - x_3 = -3, 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7, x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -11$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{c} -2R_1+R_2 \\ -R_1+R_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{R_{23}, \dots} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

해: $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -1$. (확인: $0 - 4 + 1 = -3, 0 + 12 - 5 = 7, 0 - 8 - 3 = -11$.)

(4) $x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$ (동차, 미지수 3개 > 식 2개이므로 비자명해가 있다.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

해: $x_3 = 0, x_1 = -x_2$. $x_2 = t$ 로 두면 $(x_1, x_2, x_3) = (-t, t, 0)$ (무수히 많은 해).

(5) $x_1 - x_2 - x_3 = 8, x_1 - x_2 + x_3 = 3, -x_1 + x_2 + x_3 = 4$

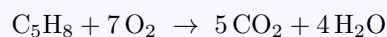
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

마지막 행은 $0 = 1$ 을 뜻하므로 해가 없다. (직접 보면 첫째 식과 셋째 식을 더하면 $0 = 12$ 가 되어 모순이다.)

2 화학 반응식의 균형

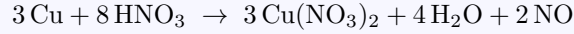
(1) $x_1\text{C}_5\text{H}_8 + x_2\text{O}_2 \rightarrow x_3\text{CO}_2 + x_4\text{H}_2\text{O}$. 원자 수 보존: C: $5x_1 = x_3$, H: $8x_1 = 2x_4$, O: $2x_2 = 2x_3 + x_4$. 미지수 4개, 식 3개인 동차 연립방정식이므로 한 개의 매개변수가 남는다. $x_1 = t$ 로 두면 $x_3 = 5t, x_4 = 4t, x_2 = \frac{2(5t)+4t}{2} = 7t$. $t = 1$ 을 택하면

답



(2) $x_1\text{Cu} + x_2\text{HNO}_3 \rightarrow x_3\text{Cu}(\text{NO}_3)_2 + x_4\text{H}_2\text{O} + x_5\text{NO}$. Cu: $x_1 = x_3$, H: $x_2 = 2x_4$, N: $x_2 = 2x_3 + x_5$, O: $3x_2 = 6x_3 + x_4 + x_5$. $x_1 = t$ 로 두고 풀면 $x_3 = t$, $x_2 = \frac{8}{3}t$, $x_4 = \frac{4}{3}t$, $x_5 = \frac{2}{3}t$. 모두 양의 정수가 되는 가장 작은 값은 $t = 3$ 이다.

답



3 기본행렬의 곱

문제. 임의의 3×3 행렬 $\mathbf{A}$ 에 대해 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A}$ 를 계산한다.

풀이. $\mathbf{A}$ 의 행을 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 이라 하자. 오른쪽부터 곱한다.

- $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$ 을 왼쪽에 곱하면 셋째 행이 $c\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ 으로 바뀐다 (행 연산 $cR_2 + R_3$).
- $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 을 왼쪽에 곱하면 첫째 행과 둘째 행이 바뀐다 (행 연산 R_{12}).

답

$$\mathbf{PEA} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ c\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} + a_{31} & ca_{22} + a_{32} & ca_{23} + a_{33} \end{pmatrix}$$

비고. 행 연산 하나는 단위행렬에 같은 연산을 한 기본행렬을 왼쪽에 곱하는 것과 같다. 가우스 소거법 전체는 기본행렬들의 곱을 왼쪽에 곱하는 과정이며, 이것이 §6.13의 LU 분해로 이어진다.