행렬의 계수(rank)

계수, 일차독립, 해의 매개변수 개수

공학수학 I · 강의노트 §6.3 Example 풀이

1 계수 구하기

행사다리꼴로 바꾼 뒤 0이 아닌 행의 수를 센다.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$: 둘째 행은 첫째 행의 3배, 셋째 행은 $-\frac{1}{2}$배이다. 행사다리꼴 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **rank = 1.**

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$: $\det = 1(0-16) - 1(1-4) + 1(4-0) = -9 \neq 0$이므로 세 행이 일차독립이다. **rank = 3.**

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & 3 & \frac{1}{3} \\ 6 & 6 & 6 & 12 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **rank = 3.** (rank가 3이므로 넷째 행은 나머지 세 행의 일차결합이다.)

2 벡터의 일차독립 판정

벡터들을 행으로 쌓은 행렬의 계수가 벡터의 개수와 같으면 일차독립이다.

(1) $\mathbf{u}_1 = \langle 1,2,3\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 1,0,1\rangle$, $\mathbf{u}_3 = \langle 1,-1,5\rangle$: $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 1(0+1) - 2(5-1) + 3(-1-0) = -10 \neq 0$. rank $= 3$이므로 **일차독립**.

(2) $\mathbf{u}_1 = \langle 1,-1,3,-1\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 1,-1,4,2\rangle$, $\mathbf{u}_3 = \langle 1,-1,5,7\rangle$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3]{-R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

rank $= 3$이므로 **일차독립**이다.

3 해의 매개변수 개수

문제. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$가 해를 갖고, $\mathbf{A}$는 5×8, $\operatorname{rank}\mathbf{A} = 3$이다.

풀이. 해를 가지는(consistent) 연립방정식에서 매개변수의 개수는 (미지수의 수) − (계수) $= n - r$이다. 미지수는 8개이므로

> **답**
> 매개변수는 $8 - 3 = 5$개이다.

4 4×6 행렬에 관한 질문

$\mathbf{A}$는 영행렬이 아닌 4×6 행렬이다.

1. rank는 행의 수와 열의 수 중 작은 값을 넘지 못하므로 **최대 rank는 4**이다.
2. 해가 있을 필요충분조건은 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$이다. $\operatorname{rank}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$이고 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) \leq \operatorname{rank}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$이며 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$이므로 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) \in \{1, 2\}$이다. $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 1$이면 **해가 없고**(inconsistent), $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 2$이면 **해가 있다**(consistent; 이때 매개변수는 $6 - 2 = 4$개).
3. 동차 연립방정식 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$은 항상 해를 가진다. $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 3$이면 매개변수는 $6 - 3 = \mathbf{3}$개이다.

5 열벡터의 일차관계로부터 계수 추론

풀이. $2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$은 세 열벡터가 일차종속이라는 뜻이다. 따라서 일차독립인 열은 최대 2개이고 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) \leq 2$이다. 또 $\mathbf{v}_1 = \langle 2, 1, -1 \rangle$과 $\mathbf{v}_2 = \langle 1, 0, 5 \rangle$은 서로 상수배가 아니므로 일차독립이다.

답
$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 2$ (따라서 $\det \mathbf{A} = 0$).

비고. 행의 계수(최대 일차독립 행의 수)와 열의 계수(최대 일차독립 열의 수)는 항상 같다. 그래서 열벡터의 관계로 rank를 판단할 수 있다.