

행렬식

소행렬식, 여인수, 여인수 전개

공학수학 I · 강의노트 §6.4 Example 풀이

1 소행렬식과 여인수

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. M_{ij} 는 i 행과 j 열을 지운 행렬의 행렬식, $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 이다.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 4 = 9,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0,$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1,$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 8 = 18.$$

답

$$M_{12} = 9, \quad M_{32} = 0, \quad C_{13} = 1, \quad C_{22} = 18$$

2 2×2 행렬식

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot (-1) = 17, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1).$$

둘째 행렬식을 0으로 두면 $\lambda = 4, -1$ 이다. 이것이 §6.8에서 고윳값을 구하는 방법(특성방정식)이다.

3 여인수 전개

(1) 첫째 행으로 전개한다.

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -3 & 6 & 1 \\ -3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -2(44) + (-21) + 4(6) = -85.$$

(2) 둘째 행(문자가 있는 행)으로 전개하면 바로 정리된 식을 얻는다.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -x + 2y - z.$$

답

$$(1) -85, \quad (2) -x + 2y - z$$

비고. 0이 많거나 문자가 모여 있는 행(열)을 골라 전개하면 계산이 줄어든다. (2)의 결과를 0으로 둔 $x - 2y + z = 0$ 은 원점을 지나고 법선벡터가 $(1, 1, 1) \times (2, 3, 4) = \langle 1, -2, 1 \rangle$ 인 평면이다. 즉 행렬식이 0이라는 것은 세 행 $(1, 1, 1)$, $\langle x, y, z \rangle$, $\langle 2, 3, 4 \rangle$ 이 일차종속이라는 뜻이다.