

행렬식의 성질

행 교환, 상수배, 행 더하기, 방데르몽드 행렬식

공학수학 I · 강의노트 §6.5 Example 풀이

이 절의 성질을 정리하면 다음과 같다.

(P1) 두 행(열)을 바꾸면 행렬식의 부호가 바뀐다.

(P2) 한 행(열)에 k 를 곱하면 행렬식도 k 배가 된다. (즉 한 행의 공통인수를 밖으로 뺄 수 있다.)

(P3) 한 행(열)의 k 배를 다른 행(열)에 더해도 행렬식은 변하지 않는다.

(P4) 두 행(열)이 같거나 서로 상수배이면 행렬식은 0이다.

1 등식을 정당화하는 성질

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$: 두 행을 바꾸었다 (P1). (값: $-2 = -(2)$.)

(2) $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -6 & -8 \end{vmatrix}$: 둘째 열을 첫째 열에 더했다 (P3). (값: 두 행렬식 모두 28.)

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 18 \\ 5 & 9 & -12 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & -4 \end{vmatrix}$: 둘째 행에서 공통인수 2를 빼고 ($\langle 4, 2, 18 \rangle = 2\langle 2, 1, 9 \rangle$), 셋째 열에서 공통인수 3을 뺐다 ($\langle 3, 9, -12 \rangle = 3\langle 1, 3, -4 \rangle$). P2를 두 번 쓰면 $2 \cdot 3 = 6$ 이다. (값: 양변 모두 168.)

2 주어진 행렬식으로부터 계산

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 5$ 를 쓴다.

(1) 첫째 열과 셋째 열을 바꾼 행렬이다 (P1): $\det \mathbf{A} = -5$.

(2) 둘째 행에서 3을, 첫째 열에서 2를 빼면 원래 행렬이 된다 (P2): $\det \mathbf{A} = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$.

(3) 셋째 행에서 $\frac{1}{2}$ 을 빼면 첫째 열이 $\langle 4a_1 - 2a_3, 4b_1 - 2b_3, 4c_1 - 2c_3 \rangle$ 이 된다. 셋째 열의 -2 배를 더하는 부분은 행렬식을 바꾸지 않고 (P3), 남은 $4 \times (\text{첫째 열})$ 에서 4를 뺐다 (P2):

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10.$$

답

(1) -5 , (2) 30 , (3) 10

3 전개하지 않고 $\det \mathbf{A} = 0$ 보이기

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}$. 둘째 행을 셋째 행에 더하면 (P3)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x+y+z & x+y+z & x+y+z \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

셋째 행에서 공통인수 $x+y+z$ 를 빼면 (P2) 첫째 행과 셋째 행이 같아지므로 (P4) 행렬식은 0이다.

4 방데르몽드(Vandermonde) 행렬식

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

풀이. 아래 행부터 차례로 “바로 위 행의 a 배를 뺀다” ($-aR_3 + R_4$, $-aR_2 + R_3$, $-aR_1 + R_2$). P3에 의해 값은 변하지 않는다.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}.$$

첫째 열로 전개하고 각 열의 공통인수를 뺐다. 남은 것은 3×3 방데르몽드 행렬식이므로 같은 과정을 반복하면 $(c-b)(d-b)(d-c)$ 가 된다.

답

$$D = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

비고. $D = 0$ 일 필요충분조건은 a, b, c, d 중 두 개가 같은 것이다. 이 결과는 서로 다른 n 개의 점을 지나는 $n-1$ 차 다항식(보간 다항식)이 유일하게 존재한다는 사실의 근거가 된다.