

역행렬

수반행렬, 가우스-조르당 소거, 직교행렬, 역행렬의 성질

공학수학 I · 강의노트 §6.6 Example 풀이

1 역행렬의 확인

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 & -1+1 \\ 6-6 & -2+3 \end{pmatrix} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3-2 & \frac{3}{2}-\frac{3}{2} \\ -4+4 & -2+3 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

따라서 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ 이다. (정사각행렬에서는 $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ 만 확인해도 충분하다.)

2 특이/정칙 판정과 $\mathbf{A}^{-1} = \text{adj } \mathbf{A} / \det \mathbf{A}$

(1) $\text{diag}(3, 6, -2)$: $\det = -36 \neq 0$ (정칙). 대각행렬의 역행렬은 대각성분의 역수이다: $\mathbf{A}^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{2})$.
(수반행렬로 해도 $\text{adj } \mathbf{A} = \text{diag}(-12, -6, 18)$ 이므로 -36 으로 나누면 같은 결과이다.)

$$(2) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}: \text{여인수 전개로 } \det \mathbf{A} = 27 \neq 0 \text{ (정칙).}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 6 & 21 & -9 & -36 \\ -1 & 1 & 6 & -3 \\ 10 & 17 & -6 & -51 \\ 4 & -4 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

(확인: $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.)

$$(3) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}: \text{하삼각행렬이므로 } \det = 1 \text{ (정칙). } \mathbf{A} \text{는 단위행렬에 } "-2R_2 + R_3, -3R_2 + R_4"$$

$$\text{를 한 것이므로 역행렬은 그 반대 연산이다: } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 역행렬 구하기 (가우스-조르당)

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}: \text{셋째 행} = 2 \times \text{둘째 행} - \text{첫째 행} \text{이므로 } \det = 0. \text{ 역행렬이 없다.}$$

(2) $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$ 를 행 연산으로 $(\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1})$ 로 만든다. $\det \mathbf{A} = -9$ 이고

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

4 $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ 확인

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}, \det \mathbf{A} = 2.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathbf{A}^{-1})^T = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{A}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

두 결과가 같다.

5 회전행렬의 역행렬

$$\det \mathbf{M} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ 이므로}$$

답

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \mathbf{M}(-\theta) = \mathbf{M}^T.$$

$\mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{a}$ 는 $\mathbf{a}$ 를 θ 만큼 돌린 것이므로, $\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}$ 는 $\mathbf{b}$ 를 반대로 $-\theta$ 만큼 돌려 원래 벡터로 되돌리는 것이다.

6 직교행렬

$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$, 즉 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ 이면 직교행렬이다.

- 회전행렬: $\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$
- 주어진 $\mathbf{A}$ 의 열은 $\frac{1}{\sqrt{6}}\langle \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\langle 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3} \rangle$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\langle -2, 1, 1 \rangle$ 이다. 각 열의 길이는 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1$ 이고, 서로의 내적은 0, $\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{6} = 0$, 0이다. 따라서 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}.$

7 가정에 근거한 질문들

아래에서 $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$ 와 “정칙 $\iff \det \neq 0$ ”을 쓴다.

- 직교행렬이면 $\det \mathbf{A} = \pm 1$. $1 = \det \mathbf{I} = \det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \det \mathbf{A}^T \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A})^2.$
- $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 정칙 $\Rightarrow \mathbf{AB}$ 정칙. $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} \neq 0$. (역행렬은 $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}.$)
- $\mathbf{A}$ 또는 $\mathbf{B}$ 가 특이 $\Rightarrow \mathbf{AB}$ 특이. $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = 0.$
- $\det \mathbf{A}^{-1} = 1/\det \mathbf{A}$. $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ 에서 $\det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^{-1} = 1.$
- $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ 이면 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ 이거나 특이. $\mathbf{A}$ 가 정칙이면 양변에 $\mathbf{A}^{-1}$ 을 곱해 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$. 정칙이 아니면 특이이다. (예: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 은 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ 인 특이행렬.)
- $\mathbf{A}$ 정칙, $\mathbf{AB} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{0}$. $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$
- $\mathbf{A}$ 정칙, $\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{C}$. 왼쪽에 $\mathbf{A}^{-1}$ 을 곱한다. ($\mathbf{A}$ 가 특이이면 소거법칙이 성립하지 않는다.)
- $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 는 정칙인가? 반드시 그렇지는 않다. $\mathbf{A} = \mathbf{I}, \mathbf{B} = -\mathbf{I}$ 이면 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$ 이다.
- $\mathbf{A}$ 정칙 $\Rightarrow \mathbf{A}^T$ 정칙. $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A} \neq 0$. 역행렬은 $(\mathbf{A}^{-1})^T$ 이다.
- 영행렬이 아닌 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 에서 $\mathbf{AB} = \mathbf{0} \Rightarrow$ 둘 다 특이. $\mathbf{A}$ 가 정칙이면 6번에 의해 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ 이 되어 모순이다. $\mathbf{B}$ 가 정칙이면 $\mathbf{A} = (\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{0}$ 이 되어 모순이다. 따라서 둘 다 특이이다.