

크라메르 공식

$x_k = \det \mathbf{A}_k / \det \mathbf{A}$ 와 약조건(ill-conditioned) 연립방정식

공학수학 I · 강의노트 §6.7 Example 풀이

1 크라메르 공식으로 풀기

$\mathbf{A}_k$ 는 $\mathbf{A}$ 의 k 번째 열을 $\mathbf{b}$ 로 바꾼 행렬이다.

(1) $-3x_1 + x_2 = 3, 2x_1 - 4x_2 = -6. \det \mathbf{A} = 12 - 2 = 10.$

$$x_1 = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = \frac{-12+6}{10} = -\frac{3}{5}, \quad x_2 = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = \frac{18-6}{10} = \frac{6}{5}.$$

(2) $0.1x_1 - 0.4x_2 = 0.13, x_1 - x_2 = 0.4. \det \mathbf{A} = -0.1 + 0.4 = 0.3.$

$$x_1 = \frac{1}{0.3} \begin{vmatrix} 0.13 & -0.4 \\ 0.4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-0.13+0.16}{0.3} = 0.1, \quad x_2 = \frac{1}{0.3} \begin{vmatrix} 0.1 & 0.13 \\ 1 & 0.4 \end{vmatrix} = \frac{0.04-0.13}{0.3} = -0.3.$$

(3) $2x + y = 1, 3x + 2y = -2. \det \mathbf{A} = 4 - 3 = 1.$

$$x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7.$$

답

(1) $x_1 = -\frac{3}{5}, x_2 = \frac{6}{5}$ (2) $x_1 = 0.1, x_2 = -0.3$ (3) $x = 4, y = -7$

2 약조건 연립방정식

$x_1 + x_2 = 1, x_1 + \epsilon x_2 = 2.$

1. $\det \mathbf{A} = \epsilon - 1$ ($\epsilon \neq 1$).

$$x_1 = \frac{1}{\epsilon - 1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \epsilon \end{vmatrix} = \frac{\epsilon - 2}{\epsilon - 1} = 1 - \frac{1}{\epsilon - 1}, \quad x_2 = \frac{1}{\epsilon - 1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\epsilon - 1}.$$

2. 계수 ϵ 을 조금 바꾸면 해가 크게 달라진다.

표 1: ϵ 이 1 근처일 때의 해

ϵ	x_1	x_2
1.01	-99	100
0.99	101	-100

계수 ϵ 은 2% 밖에 달라지지 않았는데 해의 부호가 뒤집히고 크기도 100 정도로 크다. 두 직선이 거의 평행해서 교점의 위치가 기울기의 작은 변화에 매우 민감하기 때문이다 (그림 1). $\det \mathbf{A} = \epsilon - 1$ 이 0에 가까운 것이 원인이다.

비고. 실제 계산에서는 측정 오차나 반올림 오차가 계수에 들어가므로, 약조건 문제에서는 수치해를 신뢰하기 어렵다. 행렬의 조건수(condition number)가 이런 민감도를 재는 척도이다.

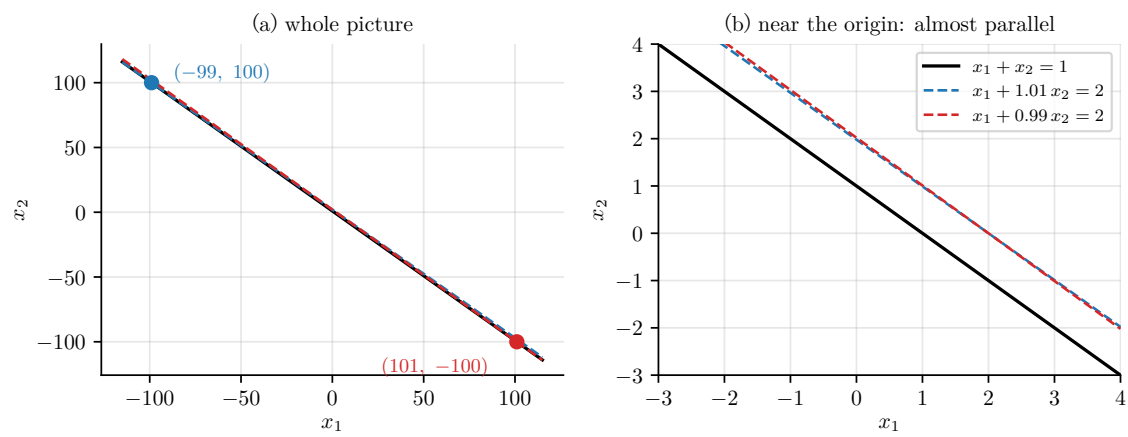


그림 1: $x_1 + x_2 = 1$ (검정)과 $x_1 + \epsilon x_2 = 2$. (b) 세 직선은 거의 평행하다. (a) 그래서 $\epsilon = 1.01$ 일 때와 0.99 일 때의 교점이 멀리 떨어진다.