

고윳값 문제

특성방정식, 고유벡터, 역행렬과 거듭제곱의 고윳값, 닮음

공학수학 I · 강의노트 §6.8 Example 풀이

1 고윳값과 고유벡터, 특이 여부

$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ 에서 λ 를 구하고, $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{k} = \mathbf{0}$ 을 푼다. $\lambda = 0$ 이 고윳값일 때만 특이행렬이다($\det \mathbf{A} =$ 고윳값의 곱).

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$: $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$. $\lambda_1 = 1$: $\mathbf{k}_1 = \langle 1, 1 \rangle$; $\lambda_2 = 6$: $\mathbf{k}_2 = \langle 2, 7 \rangle$. $\det = 6 \neq 0$ 이므로 정칙.

(2) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$: 삼각행렬이므로 고윳값은 대각성분 $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -5$. $\lambda_1 = 4$: $\mathbf{k}_1 = \langle 1, 0 \rangle$; $\lambda_2 = -5$: $9k_1 + 8k_2 = 0$ 에서 $\mathbf{k}_2 = \langle -8, 9 \rangle$. $\det = -20$ 이므로 정칙.

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$: 특성방정식 $-(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$ 이므로 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = \pm i$.

$$\lambda_1 = -1: \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = i: \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = -i: \mathbf{k}_3 = \bar{\mathbf{k}}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

실수 행렬의 복소 고윳값은 켤레쌍으로 나타나며 고유벡터도 켤레이다. $\det = (-1)(i)(-i) = -1 \neq 0$ 이므로 정칙.

2 $\mathbf{A}^{-1}$ 의 고윳값과 고유벡터

$\mathbf{A}\mathbf{k} = \lambda\mathbf{k}$ 의 양변에 $\mathbf{A}^{-1}$ 을 곱하면 $\mathbf{k} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k}$, 즉 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{k} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{k}$ 이다. 고유벡터는 그대로이고 고윳값만 역수가 된다.

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$: $(\lambda - 4)(\lambda - 6) = 0$. $\lambda = 4$: $\langle -1, 1 \rangle$; $\lambda = 6$: $\langle 1, 1 \rangle$. $\mathbf{A}^{-1}$: 고윳값 $\frac{1}{4}$ ($\langle -1, 1 \rangle$), $\frac{1}{6}$ ($\langle 1, 1 \rangle$).

(2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (상삼각): 고윳값 4, 3, 5.

$$\lambda = 3: \langle -2, 1, 0 \rangle, \quad \lambda = 4: \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad \lambda = 5: \langle -3, -1, 1 \rangle.$$

$\mathbf{A}^{-1}$: 고윳값 $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 고유벡터는 각각 같다.

3 참/거짓: $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ 는 특이행렬이다

참. λ 가 고윳값이면 $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{k} = \mathbf{0}$ 이 영벡터가 아닌 해 $\mathbf{k}$ 를 가진다. 동차 연립방정식이 비자명해를 가질 필요충분조건은 계수행렬이 특이인 것이다. 따라서 $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ 이다. (이것이 바로 특성방정식이다.)

4 A^2 의 고윳값

1. $A^2\mathbf{k} = A(A\mathbf{k}) = A(\lambda\mathbf{k}) = \lambda A\mathbf{k} = \lambda^2\mathbf{k}$. 즉 λ^2 은 A^2 의 고윳값이고 고유벡터는 같다.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$: $(\lambda+1)(\lambda-7) = 0$. $\lambda = -1$: $\langle -1, 1 \rangle$; $\lambda = 7$: $\langle 3, 5 \rangle$. $A^2 = \begin{pmatrix} 19 & 18 \\ 30 & 31 \end{pmatrix}$ 이고 $A^2\langle -1, 1 \rangle^T = \langle -1, 1 \rangle^T = (-1)^2\langle -1, 1 \rangle^T$, $A^2\langle 3, 5 \rangle^T = \langle 147, 245 \rangle^T = 49\langle 3, 5 \rangle^T = 7^2\langle 3, 5 \rangle^T$.

3. 귀납적으로 $A^n\mathbf{k} = \lambda^n\mathbf{k}$ ($n = 1, 2, \dots$). 더 일반적으로 다항식 p 에 대해 $p(A)\mathbf{k} = p(\lambda)\mathbf{k}$ 이다.

5 닮음은 대칭적인 관계

$B = S^{-1}AS$ 이면 왼쪽에 S , 오른쪽에 S^{-1} 을 곱해 $A = SBS^{-1} = (S^{-1})^{-1}B(S^{-1})$ 이다. $T = S^{-1}$ 로 두면 $A = T^{-1}BT$ 이므로 A 는 B 와 닮았다.

6 닮은 행렬은 고윳값이 같다

$B = S^{-1}AS$ 이면 $B - \lambda I = S^{-1}(A - \lambda I)S$ 이므로

$$\det(B - \lambda I) = \det S^{-1} \det(A - \lambda I) \det S = \det(A - \lambda I).$$

두 행렬의 특성방정식이 같으므로 고윳값이 같다. (고유벡터는 $\mathbf{k}_B = S^{-1}\mathbf{k}_A$ 로 바뀐다.) §6.12의 대각화 $D = P^{-1}AP$ 에서 D 의 대각성분이 A 의 고윳값인 이유가 이것이다.