

행렬의 거듭제곱

케일리-해밀턴 정리로 $\mathbf{A}^m$ 구하기, 중근, 영고윳값, 멱영행렬

공학수학 I · 강의노트 §6.9 Example 풀이

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$ 에 대해 $\lambda^m = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1}$ 이 모든 고윳값에서 성립하도록 c_i 를 정하면, 케일리-해밀턴 정리에 의해

$$\mathbf{A}^m = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A} + \cdots + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}$$

이다.

1 케일리-해밀턴 정리의 확인

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}: \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (1 - \lambda)(5 - \lambda) + 8 = \lambda^2 - 6\lambda + 13.$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 - 6\mathbf{A} + 13\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -7 - 6 + 13 & -12 + 12 \\ 24 - 24 & 17 - 30 + 13 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

2 $\mathbf{A}^m$ 계산

$$(1) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, m = 5. \text{ 특성방정식 } \lambda^2 - 8\lambda - 20 = (\lambda - 10)(\lambda + 2) = 0.$$

$$\lambda = 10: 10^m = c_0 + 10c_1, \quad \lambda = -2: (-2)^m = c_0 - 2c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{10^m - (-2)^m}{12}, \quad c_0 = \frac{10^m + 5(-2)^m}{6}.$$

$m = 5$ 이면 $c_1 = 8336$, $c_0 = 16640$ 이므로

답

$$\mathbf{A}^5 = 16640\mathbf{I} + 8336\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 83328 & 41680 \\ 33344 & 16640 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, m = 10. \text{ 첫째 열로 전개하면 } (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0, \text{ 고윳값 } 1, 2, -1.$$

$$1 = c_0 + c_1 + c_2, \quad 2^{10} = c_0 + 2c_1 + 4c_2, \quad (-1)^{10} = c_0 - c_1 + c_2.$$

첫째 식과 셋째 식에서 $c_1 = 0$, $c_0 + c_2 = 1$. 둘째 식에서 $c_0 + 4c_2 = 1024$ 이므로 $c_2 = 341$, $c_0 = -340$.

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ 이고}$$

답

$$\mathbf{A}^{10} = -340\mathbf{I} + 341\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1023 & 1023 \\ 0 & 683 & 682 \\ 0 & 341 & 342 \end{pmatrix}$$

3 중근인 경우

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$: $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0$ 이므로 $\lambda_1 = 4$ 는 중복도 2인 고윳값이다. $\lambda^m = c_0 + c_1\lambda$ 에 $\lambda = 4$ 를 넣으면 식이 하나뿐이다. 양변을 λ 로 미분한 $m\lambda^{m-1} = c_1$ 도 $\lambda = 4$ 에서 성립한다 (λ_1 이 특성다항식의 중근이므로).

$$4^m = c_0 + 4c_1, \quad m4^{m-1} = c_1 \Rightarrow c_1 = m4^{m-1}, \quad c_0 = (1-m)4^m.$$

답

$$\mathbf{A}^m = (1-m)4^m \mathbf{I} + m4^{m-1} \mathbf{A} = 4^{m-1} \begin{pmatrix} 4+3m & 3m \\ -3m & 4-3m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^6 = 1024 \begin{pmatrix} 22 & 18 \\ -18 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22528 & 18432 \\ -18432 & -14336 \end{pmatrix}$$

4 고윳값 0을 갖는 경우

특성다항식 $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ 의 상수항은 $c_0 = p(0) = \det \mathbf{A}$ 이다. $\lambda = 0$ 이 고윳값이면 $\det \mathbf{A} = 0$ 이므로 $c_0 = 0$ 이다. 같은 이유로 $\lambda^m = c_0 + c_1\lambda + \dots$ 에 $\lambda = 0$ 을 넣으면 $\mathbf{A}^m$ 표현의 c_0 도 0이다.

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$: $\lambda^2 - 4\lambda = 0$, 고윳값 0, 4. $c_0 = 0$ 이므로 남은 식은 $4^m = 4c_1$ 하나뿐이고 바로 $c_1 = 4^{m-1}$ 이다. 미지수가 하나라서 연립방정식을 풀 필요가 없다.

답

$$\mathbf{A}^m = 4^{m-1} \mathbf{A} \quad (\text{실제로 } \mathbf{A}^2 = 4\mathbf{A})$$

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$: $-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$, 고윳값 0, 2, 3. $c_0 = 0$ 이고

$$2^m = 2c_1 + 4c_2, \quad 3^m = 3c_1 + 9c_2 \Rightarrow c_1 = 3 \cdot 2^{m-1} - 2 \cdot 3^{m-1}, \quad c_2 = 3^{m-1} - 2^{m-1}.$$

답

$$\mathbf{A}^m = (3 \cdot 2^{m-1} - 2 \cdot 3^{m-1}) \mathbf{A} + (3^{m-1} - 2^{m-1}) \mathbf{A}^2, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

(확인: $m = 3$ 이면 $c_1 = -6$, $c_2 = 5$ 이고 $\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ -6 & -5 & -13 \\ 24 & 14 & 22 \end{pmatrix}$.)

5 멱영행렬

1. $\mathbf{A}^m = \mathbf{0}$ 이면 $(\det \mathbf{A})^m = \det \mathbf{A}^m = 0$ 이므로 $\det \mathbf{A} = 0$, 즉 특이행렬이다.

2. $\mathbf{A}\mathbf{k} = \lambda\mathbf{k}$ ($\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$)이면 $\mathbf{A}^m\mathbf{k} = \lambda^m\mathbf{k}$ (§6.8). 좌변이 $\mathbf{0}$ 이고 $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ 이므로 $\lambda^m = 0$, 즉 $\lambda = 0$ 이다. 모든 고윳값이 0이다.

비고. 예: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 은 지표 2인 멱영행렬이다. 고윳값이 모두 0이어도 영행렬은 아니므로, 고윳값만으로는 행렬이 결정되지 않는다.