

끌개(attractor)와 밀개(repeller)

고윳값의 부호로 상평면 궤적의 모양을 읽기

공학수학 I · 강의노트 §7.2 Example 풀이

문제. 다음 두 연립방정식의 상평면 그림(phase portrait)을 그린다.

$$(a) \text{ 끌개: } \begin{cases} \dot{x} = -\frac{5}{2}x + 2y \\ \dot{y} = \frac{3}{4}x - 2y \end{cases} \quad (b) \text{ 밀개: } \begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$$

그림을 그리기 전에 고윳값과 고유벡터를 구해 두면 궤적이 어떻게 움직일지 미리 알 수 있다.

1 (a) 끌개

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ \frac{3}{4} & -2 \end{pmatrix}:$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \left(-\frac{5}{2} - \lambda\right)(-2 - \lambda) - \frac{3}{2} = \lambda^2 + \frac{9}{2}\lambda + \frac{7}{2} = (\lambda + 1)\left(\lambda + \frac{7}{2}\right) = 0.$$

- $\lambda_1 = -1$: $-\frac{3}{2}k_1 + 2k_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{k}_1 = \langle 4, 3 \rangle$.
- $\lambda_2 = -\frac{7}{2}$: $k_1 + 2k_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{k}_2 = \langle -2, 1 \rangle$.

일반해

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-7t/2}$$

두 고윳값이 모두 음수이므로 $t \rightarrow \infty$ 일 때 모든 해가 원점으로 간다. 이런 원점을 **끌개**(안정 마디점, stable node)라 한다. $e^{-7t/2}$ 항이 e^{-t} 항보다 훨씬 빨리 사라지므로, 궤적은 먼저 $\mathbf{k}_2$ 방향 성분을 잃고 느린 방향 $\mathbf{k}_1 = \langle 4, 3 \rangle$ 에 접하면서 원점으로 들어간다 (그림 1(a)).

2 (b) 밀개

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}:$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0.$$

- $\lambda_1 = 1$: $k_1 + 2k_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{k}_1 = \langle -2, 1 \rangle$.
- $\lambda_2 = 4$: $-2k_1 + 2k_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{k}_2 = \langle 1, 1 \rangle$.

일반해

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

두 고윳값이 모두 양수이므로 원점 근처의 모든 해가 원점에서 멀어진다. 이런 원점을 **밀개**(불안정 마디점, unstable node)라 한다. 원점 근처($t \rightarrow -\infty$)에서는 느리게 자라는 $\mathbf{k}_1 = \langle -2, 1 \rangle$ 방향에 접하고, 멀리 가면 빠르게 자라는 e^{4t} 항이 지배해서 $\mathbf{k}_2 = \langle 1, 1 \rangle$ 방향과 평행해진다 (그림 1(b)).

3 Python 코드

본문의 안장점 예제와 같은 방법으로 `streamplot`을 쓴다. (a)의 경우:

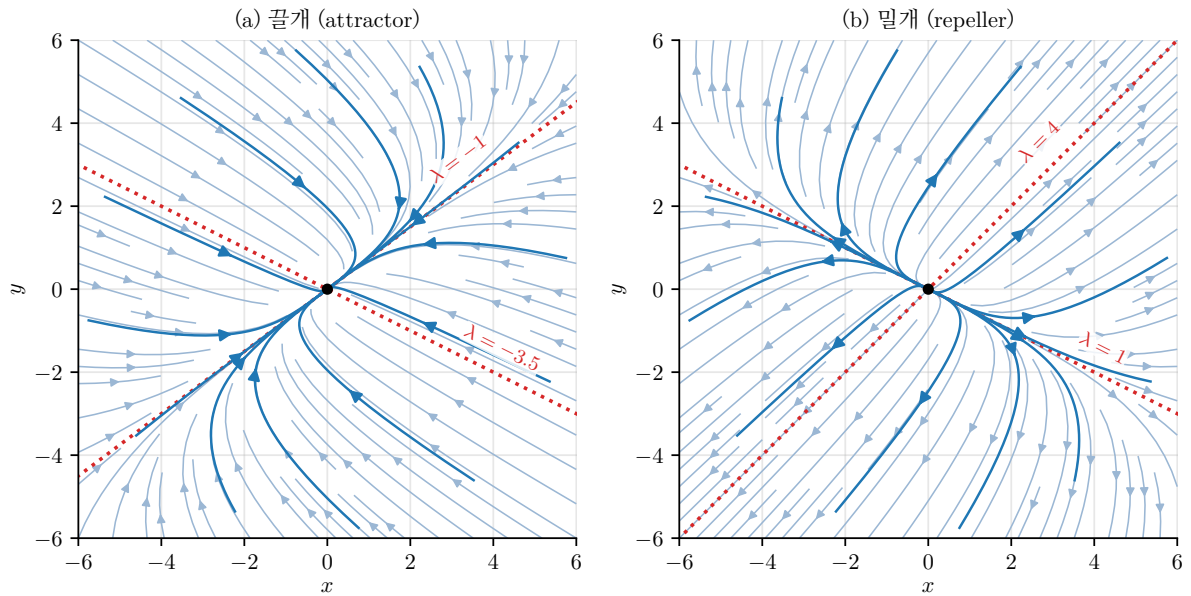


그림 1: 상평면 그림. 빨간 점선은 고유벡터 방향의 직선 해이고, 굵은 선은 몇 개의 초기값에서 출발한 궤적이며 화살표는 시간이 흐르는 방향이다.

```
w = 6
x1 = np.arange(-w, w, 0.1); y1 = np.arange(-w, w, 0.1)
x, y = np.meshgrid(x1, y1)
xdot = -5/2*x + 2*y
ydot = 3/4*x - 2*y
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5, 5))
ax.streamplot(x, y, xdot, ydot, color='blue')
ax.plot(x1, 3/4*x1, 'r:', x1, -1/2*x1, 'r:') # eigenvector lines
ax.axis((-w, w, -w, w))
```

(b)는 $\text{xdot} = 2*x + 2*y$, $\text{ydot} = x + 3*y$ 로 바꾸고 고유벡터 직선을 $-1/2*x1$, $x1$ 로 그린다.

비고. 이 예제의 두 마디점과 본문 첫 예제의 안장점(고윳값 부호가 서로 다름)은 실수 고윳값 2×2 계의 세 가지 기본 모양이다. 고윳값이 모두 음수면 끌개, 모두 양수면 밀개, 부호가 다르면 안장점이다.