

자율계의 임계점

$P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$ 을 동시에 푼다

공학수학 I · 강의노트 §8.1 Example 풀이

문제. $x' = x^2 + y^2 - 6$, $y' = x^2 - y$ 의 임계점을 모두 구한다.

풀이. 임계점은 $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ 인 점, 즉

$$x^2 + y^2 - 6 = 0, \quad x^2 - y = 0$$

의 실수해이다. 둘째 식에서 $x^2 = y$ 이고, 이것을 첫째 식에 넣으면

$$y + y^2 - 6 = (y + 3)(y - 2) = 0 \implies y = 2 \text{ 또는 } y = -3.$$

$y = x^2 \geq 0$ 이어야 하므로 $y = -3$ 은 실수해를 주지 않는다 ($x^2 = -3$). $y = 2$ 이면 $x^2 = 2$, $x = \pm\sqrt{2}$.

답

임계점은 $(\sqrt{2}, 2)$ 와 $(-\sqrt{2}, 2)$ 두 개이다.

기하학적으로는 원 $x^2 + y^2 = 6$ 과 포물선 $y = x^2$ 의 교점이다. 두 곡선은 $y \geq 0$ 인 부분에서 두 번 만난다.

비고. 이 두 임계점의 안정성은 §8.3의 예제에서 야코비 행렬로 판정한다: $(\sqrt{2}, 2)$ 는 불안정(안장점), $(-\sqrt{2}, 2)$ 는 점근적으로 안정하다.