

선형계의 안정성

$\tau, \Delta, \tau^2 - 4\Delta$ 로 임계점 $(0, 0)$ 분류하기

공학수학 I · 강의노트 §8.2 Example 풀이

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대해 $\tau = a + d, \Delta = ad - bc$ 이고 고윳값은 $\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$ 이다.

$\Delta < 0$: 안장점. $\Delta > 0, \tau^2 - 4\Delta > 0$: 마디점 ($\tau < 0$ 안정, $\tau > 0$ 불안정). $\tau^2 - 4\Delta = 0$: 퇴화 마디점.
 $\tau^2 - 4\Delta < 0$: $\tau = 0$ 이면 중심, $\tau < 0$ 안정 나선점, $\tau > 0$ 불안정 나선점.

1 서로 다른 실수 고윳값

(a) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$: $\tau = -7, \Delta = 10 - 4 = 6, \tau^2 - 4\Delta = 25 > 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-7 \pm 5}{2} = -1, -6$.

$$\lambda_1 = -1 : \mathbf{k}_1 = \langle -2, 1 \rangle, \quad \lambda_2 = -6 : \mathbf{k}_2 = \langle 1, 2 \rangle.$$

두 고윳값이 모두 음수이므로 안정 마디점. 궤적은 느린 방향 $\mathbf{k}_1$ (고윳값 -1)에 접하면서 원점으로 들어간다.

(b) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$: $\tau = 3, \Delta = -4 + 6 = 2, \tau^2 - 4\Delta = 1 > 0 \Rightarrow \lambda = 1, 2$.

$$\lambda_1 = 1 : \mathbf{k}_1 = \langle 1, -1 \rangle, \quad \lambda_2 = 2 : \mathbf{k}_2 = \langle 2, -3 \rangle.$$

두 고윳값이 모두 양수이므로 불안정 마디점.

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$: $\tau = 0, \Delta = -4 + 3 = -1 < 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$.

$$\lambda_1 = i : \mathbf{k}_1 = \langle 1, 1 \rangle, \quad \lambda_2 = -i : \mathbf{k}_2 = \langle 1, 3 \rangle.$$

부호가 다르므로 안장점. $\mathbf{k}_2$ 방향 직선 위에서 출발한 해만 원점으로 가고, 나머지는 $\mathbf{k}_1$ 방향을 점근선으로 하여 멀어진다.

2 중근

(a) $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\tau = 2, \Delta = 1, \tau^2 - 4\Delta = 0, \lambda = 1$ (중근). $\mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$ 이므로 모든 벡터가 고유벡터이다 (일차독립인 고유벡터 2개). 해는 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^t$ 로 원점에서 뻗어 나가는 반직선이다. 퇴화 불안정 마디점.

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$: $\tau = -6, \Delta = -27 + 36 = 9, \tau^2 - 4\Delta = 0, \lambda = -3$ (중근). $\mathbf{A} + 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ 에서 고유벡터는 $\mathbf{k}_{11} = \langle 3, 1 \rangle$ 하나뿐이다. $\lambda < 0$ 이므로 퇴화 안정 마디점. 해는 $\mathbf{k}_{11}$ 방향으로 원점에 들어간다.

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$: $\tau = 8, \Delta = 12 + 4 = 16, \tau^2 - 4\Delta = 0, \lambda = 4$ (중근). $\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 에서 고유벡터는 $\mathbf{k}_{11} = \langle 2, 1 \rangle$ 하나뿐이다. $\lambda > 0$ 이므로 퇴화 불안정 마디점.

3 복소 고윳값

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$: $\tau = 0, \Delta = -1 + 2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm i$. 순허수이므로 중심. 해는 원점을 둘러싼 타원이고 주기는 $2\pi/\beta = 2\pi$ 이다. 점 $(1, 0)$ 에서 속도가 $(x', y') = (-1, -1)$ 이므로 궤적은 시계 방향으로 돈다.

(b) $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$: $\tau = -2$, $\Delta = 1 + 4 = 5$, $\tau^2 - 4\Delta = -16 < 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm 2i$. 실수부 $\alpha = -1 < 0$ 이므로 안정 나선점. 해는 e^{-t} 로 줄어들면서 원점으로 감겨 들어간다. 점 $(1, 0)$ 에서 속도가 $(-1, 1)$ 이므로 반시계 방향으로 돈다.

정리

첫째 예제: (a) 안정 마디점	(b) 불안정 마디점	(c) 안장점
둘째 예제: (a) 퇴화 불안정 마디점	(b) 퇴화 안정 마디점	(c) 퇴화 불안정 마디점
셋째 예제: (a) 중심	(b) 안정 나선점	

비고. 회전 방향은 한 점에서의 속도벡터로 바로 알 수 있다. 일반적으로 $(1, 0)$ 에서의 속도는 (a, c) 이므로, $c > 0$ 이면 반시계, $c < 0$ 이면 시계 방향이다.