

수학적 모델로서의 자율계

미끄러지는 구슬의 주기해, 로트카-볼테라 경쟁 모델의 임계점

공학수학 I · 강의노트 §8.4 Example 풀이

1 곡선 $z = \cosh x$ 위의 구슬

문제. 구슬이 $x(0) = x_0$ 에서 초기속도 $x'(0) = \nu_0$ 으로 출발한다. 감쇠가 없을 때 상평면 방법으로 해가 주기적임을 보인다.

풀이. $f(x) = \cosh x$ 이면 $f'(x) = \sinh x$, $1 + f'(x)^2 = 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$ 이므로 $\beta = 0$ 인 자율계는

$$x' = y, \quad y' = -g \frac{\sinh x}{\cosh^2 x}.$$

유일한 임계점은 $f'(x) = 0$ 인 $(0, 0)$ 이고, 야코비 행렬은 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -gf''(0) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & 0 \end{pmatrix}$ 이다. 고윳값이 $\pm i\sqrt{g}$ (순허수)이므로 선형화만으로는 중심인지 나선점인지 알 수 없다. 그래서 상평면 방법을 쓴다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = -g \frac{\sinh x}{y \cosh^2 x} \implies y dy = -g \frac{\sinh x}{\cosh^2 x} dx \implies \frac{y^2}{2} = \frac{g}{\cosh x} + C.$$

초기조건 (x_0, ν_0) 을 넣으면

궤적

$$y^2 = \nu_0^2 + 2g (\operatorname{sech} x - \operatorname{sech} x_0)$$

- 식이 $y \rightarrow -y$, $x \rightarrow -x$ 에 대해 대칭이다. 즉 궤적은 x 축과 y 축에 대해 대칭이다.
- $\nu_0^2 < 2g \operatorname{sech} x_0$ 이면 $\operatorname{sech} x_1 = \operatorname{sech} x_0 - \frac{\nu_0^2}{2g} \in (0, 1]$ 인 $x_1 > 0$ 이 있다. $|x| < x_1$ 에서는 $\operatorname{sech} x > \operatorname{sech} x_1$ 이므로 $y^2 > 0$ 이고 각 x 에 y 가 두 개 대응한다. $x = \pm x_1$ 에서 $y = 0$ 이고, $|x| > x_1$ 에서는 $y^2 < 0$ 이 되어 궤적이 없다.
- 따라서 궤적은 $(0, 0)$ 을 둘러싼 닫힌 곡선이고 해는 주기적이다. 구슬은 $-x_1$ 과 x_1 사이를 왕복한다. 특히 정지 상태에서 놓으면 ($\nu_0 = 0$) 항상 주기적이고 진폭은 $|x_0|$ 이다.

비고. 이 모델의 x 방향 힘 $-mg \sinh x / \cosh^2 x$ 는 $|x| \rightarrow \infty$ 에서 0으로 줄어든다. 그래서 $\nu_0^2 \geq 2g \operatorname{sech} x_0$ 이면 $y^2 \geq \nu_0^2 - 2g \operatorname{sech} x_0 \geq 0$ 이 되어 구슬이 되돌아오지 않는다 (그림 1의 바깥 곡선). 문제의 “주기적”이라는 결론은 이 조건, 즉 $|\nu_0| < \sqrt{2g \operatorname{sech} x_0}$ 에서 성립한다.

2 로트카-볼테라 경쟁 모델

문제. $x' = 0.004x(50 - x - 0.75y)$, $y' = 0.001y(100 - y - 3x)$ 의 임계점을 모두 구하고 분류한다.

임계점. $x' = 0$ 이면 $x = 0$ 또는 $x + 0.75y = 50$ 이고, $y' = 0$ 이면 $y = 0$ 또는 $3x + y = 100$ 이다. 네 가지 조합에서

$$(0, 0), \quad (50, 0), \quad (0, 100), \quad (\hat{x}, \hat{y}) = (20, 40)$$

이다. 마지막 점은 $x + 0.75y = 50$, $3x + y = 100$ 을 연립해서 얻는다 (공식 $\hat{x} = \frac{K_1 - \alpha_{12}K_2}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}} = \frac{50 - 75}{1 - 2.25} = 20$, $\hat{y} = \frac{100 - 150}{-1.25} = 40$ 과 같다).

야코비 행렬.

$$\mathbf{g}'(x, y) = \begin{pmatrix} 0.004(50 - 2x - 0.75y) & -0.003x \\ -0.003y & 0.001(100 - 2y - 3x) \end{pmatrix}.$$

$(0, 100)$ 에서 $\mathbf{A} + 0.1\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.3 & 0 \end{pmatrix}$ 이므로 고유벡터는 $\langle 0, 1 \rangle$ 하나뿐이다 (퇴화). 마디점과 퇴화 마디점은

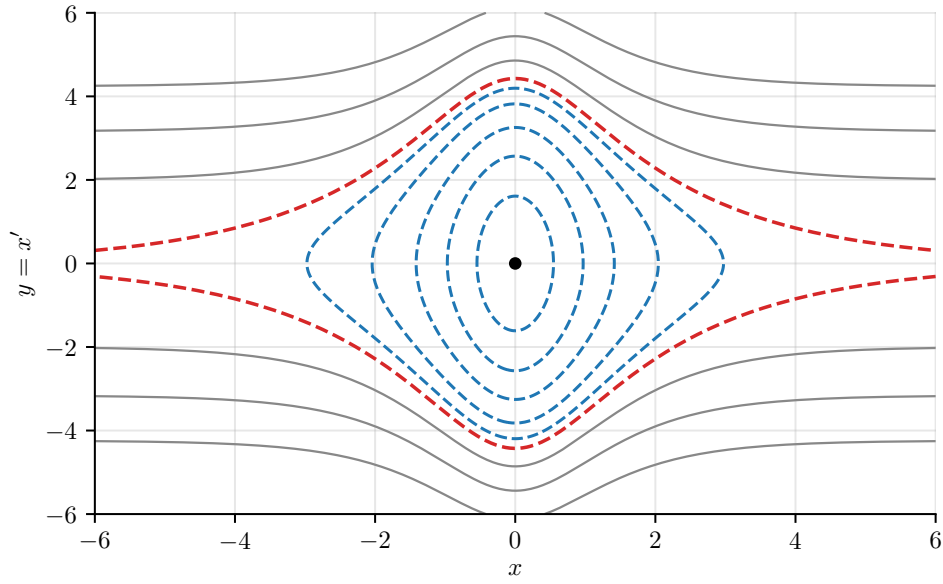


그림 1: $y^2 - 2g \operatorname{sech} x = \text{일정인 궤적}$ ($g = 9.8$). 값이 음수이면 닫힌 곡선(주기해), 0이면 경계 곡선(빨간 점선), 양수이면 열린 곡선이다.

표 1: 임계점의 분류

임계점	$\mathbf{A} = \mathbf{g}'$	τ	Δ	고윳값	분류
$(0, 0)$	$\begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$	0.3	0.02	0.2, 0.1	불안정 마디점
$(50, 0)$	$\begin{pmatrix} -0.2 & -0.15 \\ 0 & -0.05 \end{pmatrix}$	-0.25	0.01	-0.2, -0.05	안정 마디점
$(0, 100)$	$\begin{pmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.3 & -0.1 \end{pmatrix}$	-0.2	0.01	-0.1 (중근)	퇴화 안정 마디점
$(20, 40)$	$\begin{pmatrix} -0.08 & -0.06 \\ -0.12 & -0.04 \end{pmatrix}$	-0.12	-0.004	$\frac{-3 \pm \sqrt{19}}{50}$	안장점

선형화로 판정이 바뀌지 않는 경우이다 (본문의 분류 그림 참고).

해석

두 종이 공존하는 점 $(20, 40)$ 은 안장점이라 불안정하다. 거의 모든 초기 상태는 $(50, 0)$ (종 I만 생존) 또는 $(0, 100)$ (종 II만 생존)으로 간다. 어느 쪽으로 갈지는 안장점의 안정 다양체(stable manifold, 안장점으로 들어가는 궤적)의 어느 편에서 출발하는지에 달려 있다. 이것을 경쟁 배제라 한다.