

주기해와 전역 안정성

주기해가 없음을 보이는 판정법과 푸앵카레-벤딕슨 정리

공학수학 I · 강의노트 §8.5 Example 풀이

1 경쟁 모델에는 제1사분면에 주기해가 없다

문제. $x' = 0.004x(50 - x - 0.75y)$, $y' = 0.001y(100 - y - 3x)$ 가 제1사분면에서 주기해를 갖지 않음을 보인다.

풀이 1 (임계점에 관한 정리).

- 좌표축은 불변이다. $x = 0$ 이면 $x' = 0$, $y = 0$ 이면 $y' = 0$ 이므로 축 위에서 출발한 해는 축을 벗어나지 않는다. 해의 유일성 때문에 다른 궤적도 축을 가로지를 수 없다. 또 축 위의 운동은 로지스틱 방정식이라 단조이므로 축 위에는 주기해가 없다. 따라서 주기해가 있다면 열린 제1사분면 $x > 0, y > 0$ 안에 있다.
- 그 주기해가 이루는 단순 닫힌 곡선 C 의 내부도 열린 제1사분면에 들어 있다. §8.4의 결과에 의하면 열린 제1사분면 안의 임계점은 $(20, 40)$ 하나뿐이고 이것은 안장점이다.
- 정리에 의하면 C 의 내부에는 임계점이 적어도 하나 있어야 하고, 하나뿐이라면 안장점일 수 없다. C 안에 있을 수 있는 임계점은 안장점 $(20, 40)$ 하나뿐이므로 모순이다.

따라서 제1사분면에는 주기해가 없다.

풀이 2 (돌라크 판정법). 본문의 예제처럼 $\delta = 1/(xy)$ 로 두면

$$\frac{\partial(\delta P)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta Q)}{\partial y} = -\frac{0.004}{y} - \frac{0.001}{x} < 0 \quad (x > 0, y > 0)$$

이므로 부호가 바뀌지 않고, 열린 제1사분면(단순연결)에 주기해가 없다.

2 벤딕슨 판정법과 푸앵카레-벤딕슨 II

문제. $x' = x^2y - x + 1$, $y' = -x^2y + \frac{1}{2}$ 는 직사각형 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ 안에 제1형 불변영역 $\mathbb{R}$ 을 갖는다. (a) 주기해가 없음을 보이고, (b) $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}$ 일 때 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$ 를 구한다.

(a) $P = x^2y - x + 1$, $Q = -x^2y + \frac{1}{2}$ 이므로

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = (2xy - 1) - x^2 = -(x - y)^2 - (1 - y^2).$$

$0 \leq y \leq 1$ 이면 두 항이 모두 0 이하이므로 $\operatorname{div} \mathbf{v} \leq 0$ 이다. 등호는 $x = y$ 이고 $y = 1$ 인 한 점 $(1, 1)$ 에서만 성립한다. 발산이 직사각형 안에서 부호를 바꾸지 않으므로 (그리고 어떤 영역에서도 항등적으로 0이 아니므로) 벤딕슨 판정법에 의해 $\mathbb{R}$ 에는 주기해가 없다.

(b) 임계점: $Q = 0$ 에서 $x^2y = \frac{1}{2}$. 이것을 $P = 0$ 에 넣으면 $\frac{1}{2} - x + 1 = 0$, 즉 $x = \frac{3}{2}$ 이고 $y = \frac{1}{2x^2} = \frac{2}{9}$ 이다. 임계점은 $(\frac{3}{2}, \frac{2}{9})$ 하나뿐이고 직사각형 안에 있다.

$$\mathbf{g}'(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy - 1 & x^2 \\ -2xy & -x^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{g}'\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{9}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{9}{4} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

$\tau = -\frac{31}{12} < 0$, $\Delta = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} > 0$, $\tau^2 - 4\Delta = \frac{961}{144} - 9 = -\frac{335}{144} < 0$. 따라서 고윳값은 $\lambda = \frac{-31 \pm i\sqrt{335}}{24}$ 이고 임계점은 안정 나선점이다.

$\mathbb{R}$ 은 제1형 불변영역이고, (a)에 의해 주기해가 없으며, 내부에 안정 나선점이 하나뿐이다. 푸앵카레-벤딕슨 II (b)에 의해

답

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{9}\right) \quad (\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R} \text{이면 항상})$$

즉 이 임계점은 $\mathbb{R}$ 에서 전역적으로 안정하다 (그림 1).

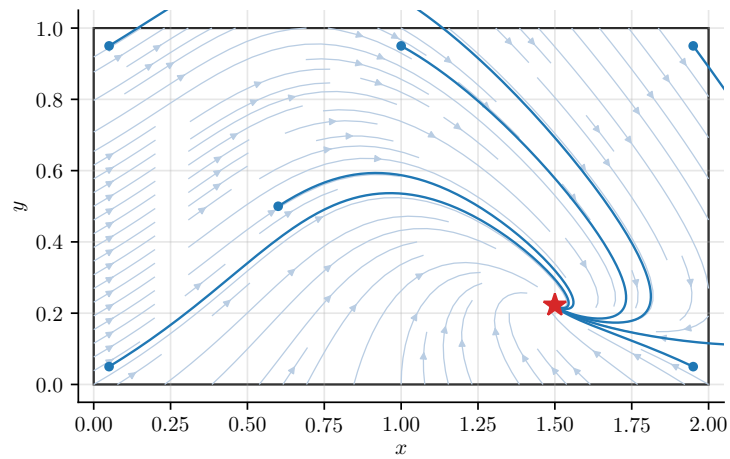


그림 1: 직사각형의 여러 점에서 출발한 궤적이 모두 안정 나선점 $(\frac{3}{2}, \frac{2}{9})$ 로 감겨 들어간다.