

닫힌 다각형을 이루는 벡터의 합

머리-꼬리 연결과 벡터 덧셈

공학수학 II · 강의노트 §9.1 Example 풀이

1 문제

그림 1를 이용하여 다음을 증명한다.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

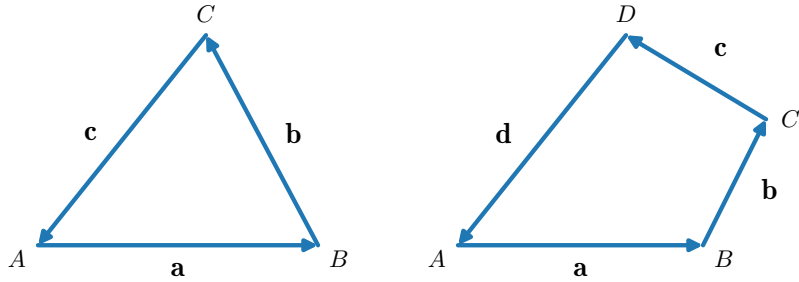


그림 1: 각 벡터의 머리에 다음 벡터의 꼬리가 붙어 있고, 마지막 벡터의 머리가 처음 꼭짓점으로 돌아온다.

2 풀이

벡터 덧셈의 삼각형 법칙: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. 즉 첫 벡터의 머리에 둘째 벡터의 꼬리를 붙이면 합은 첫 꼬리에서 마지막 머리로 가는 벡터이다.

2.1 삼각형

꼭짓점을 A, B, C 라 하고 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{CA}$ 라 하자. 삼각형 법칙을 두 번 쓰면

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}.$$

2.2 사각형

꼭짓점을 A, B, C, D 라 하고 $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{DA}$ 라 하면

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{0}.$$

결론

머리와 꼬리를 차례로 이어 닫힌 경로를 만드는 벡터들의 합은 출발점에서 출발점으로 가는 벡터, 즉 영벡터이다. 꼭짓점 수가 몇 개이든 같다.

3 성분으로 확인

꼭짓점 좌표를 $P_1, \dots, P_n$ 이라 하면 각 변 벡터는 $P_{k+1} - P_k$ ($P_{n+1} = P_1$)이고

$$\sum_{k=1}^n (P_{k+1} - P_k) = P_{n+1} - P_1 = \mathbf{0}$$

이다(이웃한 항이 서로 지워지는 망원급수). 예를 들어 그림의 삼각형 $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(2.4, 3)$ 에서 $\mathbf{a} = \langle 4, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1.6, 3 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle -2.4, -3 \rangle$ 이고 합은 $\langle 0, 0 \rangle$ 이다.

비고. 같은 원리로, 물체에 작용하는 힘들을 머리-꼬리로 이었을 때 닫힌 다각형이 되면 합력이 0, 즉 물체는 힘의 평형 상태에 있다(힘의 다각형).