방정식이 나타내는 점들의 자취

곱이 0인 식과 제곱합이 0인 식

공학수학 II · 강의노트 §9.2 Example 풀이

1 문제

다음 방정식을 만족하는 점 $P(x,y,z)$의 자취를 설명한다.

(a) $xyz=0$ (b) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=0$ (c) $(x-2)(z-8)=0$ (d) $z^2-25=0$ (e) $x=y=z$

2 풀이

두 가지 사실만 쓴다.

- 실수의 곱이 0이면 적어도 하나의 인수가 0이다: $AB=0 \iff A=0$ 또는 $B=0$.
- 실수의 제곱은 음이 아니므로, 제곱의 합이 0이면 각 제곱이 모두 0이다.

3차원 공간에서 한 좌표를 고정한 식(예: $x=2$)은 **평면**이다.

(a) $xyz=0 \iff x=0$ 또는 $y=0$ 또는 $z=0$. 자취는 세 좌표평면 yz-평면, xz-평면, xy-평면의 **합집합**이다.

(b) 세 제곱이 모두 0이어야 하므로 $x=-1$, $y=2$, $z=-3$. 자취는 **한 점** $(-1,2,-3)$이다. (우변이 $r^2>0$이면 중심 $(-1,2,-3)$, 반지름 r인 구가 된다. 반지름 0인 "구"가 한 점으로 줄어든 것이다.)

(c) $x=2$ 또는 $z=8$. yz-평면에 평행한 평면 $x=2$와 xy-평면에 평행한 평면 $z=8$의 합집합이다. 두 평면은 직선 $x=2,\ z=8$ (y축에 평행)에서 직교한다.

(d) $(z-5)(z+5)=0$이므로 $z=5$ 또는 $z=-5$. xy-평면에 평행하고 서로 10만큼 떨어진 **두 평면**이다.

(e) $x=y=z$는 두 식 $x=y$와 $y=z$를 한꺼번에 쓴 것이다. 각각은 원점을 지나는 평면이므로 자취는 두 평면의 교선, 즉 **직선**이다. 공통값을 t로 두면

$$x=t, \qquad y=t, \qquad z=t, \qquad -\infty<t<\infty,$$

곧 원점을 지나고 방향벡터가 $\langle 1,1,1\rangle$인 직선이다. 이 직선은 세 좌표축과 같은 각 θ를 이루며, $\cos\theta=1/\sqrt{3}$, 즉 $\theta\approx 54.7^\circ$이다.

답
(a) 세 좌표평면의 합집합, (b) 한 점 $(-1,2,-3)$, (c) 평면 $x=2$와 평면 $z=8$의 합집합, (d) 두 평면 $z=5$와 $z=-5$, (e) 원점을 지나고 방향이 $\langle 1,1,1\rangle$인 직선.

비고. 2차원에서 $xy=0$은 두 좌표축(직선)이지만, 3차원에서 $xy=0$은 yz-평면과 xz-평면이다. 같은 방정식이라도 공간의 차원에 따라 자취의 모양이 달라진다.

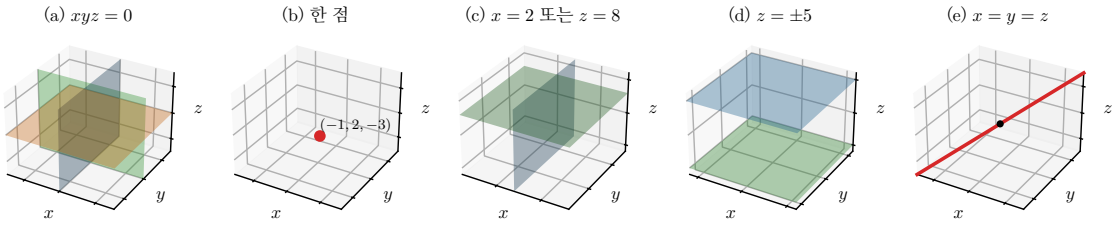

그림 1: 다섯 자취. (b)는 점 하나뿐이고, (e)는 직선이다.