b에서 a 방향 성분을 뺀 벡터

정사영과 직교 분해

공학수학 II · 강의노트 §9.3 Example 풀이

1 문제

$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$일 때 벡터

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\right)\mathbf{a}$$

가 $\mathbf{a}$와 직교함을 보인다.

2 풀이

두 벡터가 직교할 필요충분조건은 내적이 0인 것이다. 내적의 선형성$(\mathbf{a}\cdot(\mathbf{u}+k\mathbf{v}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{u} + k\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})$을 쓰면

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0.$$

여기서 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$이므로 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 > 0$이고 나눗셈이 가능하다.

결론
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 0$이므로 $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$이다. (또 $\mathbf{c} = \mathbf{0}$인 경우, 즉 $\mathbf{b}$가 $\mathbf{a}$에 평행한 경우에도 영벡터는 모든 벡터와 직교한다고 본다.)

3 기하학적 의미

$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \left(\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\right)\mathbf{a}$는 $\mathbf{b}$를 $\mathbf{a}$ 위에 내린 정사영이다. 따라서

$$\mathbf{b} = \underbrace{\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}}_{\mathbf{a}\text{에 평행}} + \underbrace{\mathbf{c}}_{\mathbf{a}\text{에 수직}}$$

는 $\mathbf{b}$를 $\mathbf{a}$에 평행한 성분과 수직인 성분으로 나눈 **직교 분해**이다(그림 1).

수치 예. $\mathbf{a} = \langle 1,2,2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3,0,4\rangle$이면 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 11$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 9$이고

$$\mathbf{c} = \langle 3,0,4\rangle - \tfrac{11}{9}\langle 1,2,2\rangle = \tfrac{1}{9}\langle 16,-22,14\rangle, \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \tfrac{1}{9}(16-44+28) = 0.$$

비고. 이 계산이 §9.7 Gram–Schmidt 과정의 한 단계이다: $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$은 바로 위의 $\mathbf{c}$이다.

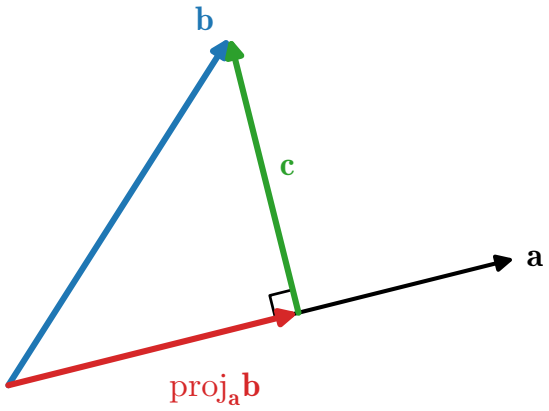

그림 1: $\mathbf{b} = \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$.