

삼중 벡터곱에 관한 항등식

BAC-CAB 공식, 결합법칙의 실패, Jacobi 항등식, Lagrange 항등식

공학수학 II · 강의노트 §9.4 Example 풀이

1 문제

다음을 증명하거나 반증한다.

- (a) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
- (b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
- (c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$
- (d) (Lagrange 항등식) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

2 (a) 참: “BAC-CAB” 공식

양변은 모두 각 벡터에 대해 선형이다. 따라서 성분 하나를 비교하면 충분하다. $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \langle b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1 \rangle$ 이므로 좌변의 x 성분은

$$\begin{aligned} [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_1 &= a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ &= b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ &= b_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - a_1c_1) - c_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - a_1b_1) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_1. \end{aligned}$$

(셋째 줄에서 $a_1b_1c_1$ 을 더하고 뺐다.) y, z 성분도 첨자를 순환시키면 같은 계산이 된다. 따라서 (a)는 항상 성립한다.

Levi-Civita 기호로: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ 을 쓰면 $[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = \varepsilon_{ijk}a_j\varepsilon_{klm}b_lc_m = a_jb_ic_j - a_jb_jc_i$ 로 한 줄에 끝난다.

3 (b) 거짓: 벡터곱은 결합법칙을 만족하지 않는다

반례: $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{i}, \mathbf{c} = \mathbf{j}$.

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \quad (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}.$$

일반적으로 (a)에 의해 좌변은 $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ 가 이루는 평면 안에 있고, 우변 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$ 는 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 가 이루는 평면 안에 있다. 두 식의 차는

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

이므로, 두 식은 $\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{0}$ 인 특별한 경우에만 같다.

4 (c) 참: Jacobi 항등식

(a)를 세 항에 각각 적용한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \\ \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}, \\ \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}. \end{aligned}$$

내적은 교환법칙을 만족하므로 세 줄을 더하면 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 의 계수가 모두 0이다. 따라서 합은 $\mathbf{0}$ 이다.

5 (d) 참: Lagrange 항등식

$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin \theta$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \theta$ 이므로

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2.$$

(성분으로 직접 전개해도 $(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$ 가 확인된다.) 또 다른 증명: 스칼라 삼중곱 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ 와 (a)를 쓰면 $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = \mathbf{a} \cdot (\|\mathbf{b}\|^2 \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b})$.

답

(a) 참, (b) 거짓 (반례 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{i}$, $\mathbf{c} = \mathbf{j}$), (c) 참 (Jacobi 항등식), (d) 참.

6 수치 확인

$\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 0, 2 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle 2, 1, -1 \rangle$ 로 계산한 값은 표 1과 같다.

표 1: 임의의 세 벡터로 계산한 양변

양	값
(a) 좌변 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$	$\langle -11, -5, 7 \rangle$
(a) 우변 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$	$\langle -11, -5, 7 \rangle$
(b) 우변 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$	$\langle 3, 8, 14 \rangle$
(c) 세 항의 합	$\langle 0, 0, 0 \rangle$
(d) $\ \mathbf{a} \times \mathbf{b}\ ^2$	45
(d) $\ \mathbf{a}\ ^2 \ \mathbf{b}\ ^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$	45