

평면에 수직인 직선

평면의 법선벡터를 직선의 방향벡터로

공학수학 II · 강의노트 §9.5 Example 풀이

1 문제

점 $(-4, 1, 7)$ 을 지나고 평면 $-7x + 2y + 3z = 1$ 에 수직인 직선의 매개변수 방정식을 구한다.

2 풀이

평면 $ax + by + cz = d$ 의 법선벡터는 $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ 이다. 평면에 수직인 직선은 법선벡터와 평행하므로 방향벡터로

$$\mathbf{n} = \langle -7, 2, 3 \rangle$$

를 쓸 수 있다. 직선의 벡터방정식 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{n}$ 에 $\mathbf{r}_0 = \langle -4, 1, 7 \rangle$ 을 넣으면 다음을 얻는다.

답

$$x = -4 - 7t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 7 + 3t, \quad -\infty < t < \infty.$$

$$\text{대칭방정식으로 쓰면 } \frac{x+4}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-7}{3}.$$

3 확인과 보충

- $t = 0$ 이면 $(-4, 1, 7)$ 이므로 주어진 점을 지난다.
- 직선과 평면의 교점: 직선을 평면 식에 넣으면 $-7(-4 - 7t) + 2(1 + 2t) + 3(7 + 3t) = 51 + 62t = 1$, 즉 $t = -\frac{25}{31}$ 이고 교점은 $(\frac{51}{31}, -\frac{19}{31}, \frac{142}{31})$ 이다. 이 점이 $(-4, 1, 7)$ 에서 평면에 내린 수선의 발이다.
- 따라서 점 $(-4, 1, 7)$ 과 평면 사이의 거리는

$$|t| \|\mathbf{n}\| = \frac{25}{31} \sqrt{62} = \frac{|-7(-4) + 2(1) + 3(7) - 1|}{\sqrt{49 + 4 + 9}} = \frac{50}{\sqrt{62}} \approx 6.35$$

로, 점과 평면 사이의 거리 공식과 일치한다.

비고. 방향벡터는 $\mathbf{n}$ 의 0이 아닌 상수배이면 어느 것이든 된다. 예를 들어 $\langle 7, -2, -3 \rangle$ 을 쓰면 $x = -4 + 7s$, $y = 1 - 2s$, $z = 7 - 3s$ 로 모양은 다르지만 같은 직선이다($s = -t$).