두 평면의 교선

법선벡터의 벡터곱이 교선의 방향

공학수학 II · 강의노트 §9.5 Example 풀이

1 문제

두 평면 $5x-4y-9z=8,\ x+4y+3z=4$의 교선의 매개변수 방정식을 구한다.

2 풀이

2.1 방향벡터

교선은 두 평면에 모두 놓이므로 두 법선벡터 $\mathbf{n}_1=\langle 5,-4,-9\rangle$, $\mathbf{n}_2=\langle 1,4,3\rangle$에 모두 수직이다. 따라서 방향벡터로 $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$를 쓸 수 있다.

$$\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\5&-4&-9\\1&4&3\end{vmatrix}=\big((-4)(3)-(-9)(4)\big)\mathbf{i}-\big(5\cdot 3-(-9)\cdot 1\big)\mathbf{j}+\big(5\cdot 4-(-4)\cdot 1\big)\mathbf{k}=\langle 24,-24,24\rangle.$$

간단히 $\mathbf{v}=\langle 1,-1,1\rangle$로 쓴다.

2.2 교선 위의 한 점

$\mathbf{v}$의 z성분이 0이 아니므로 교선은 평면 $z=0$과 만난다. $z=0$을 넣으면

$$5x-4y=8,\qquad x+4y=4\ \Longrightarrow\ 6x=12,\ x=2,\ y=\tfrac{1}{2}.$$

점 $\big(2,\tfrac{1}{2},0\big)$은 두 평면 위에 있다: $5(2)-4(\tfrac{1}{2})=8$, $2+4(\tfrac{1}{2})=4$.

답

$$x=2+t,\qquad y=\tfrac{1}{2}-t,\qquad z=t,\qquad -\infty<t<\infty.$$

3 확인

식을 두 평면에 직접 넣으면 t가 소거된다.

$$5(2+t)-4(\tfrac{1}{2}-t)-9t=8+(5+4-9)t=8,\qquad (2+t)+4(\tfrac{1}{2}-t)+3t=4+(1-4+3)t=4.$$

다른 방법 (소거법). $z=t$로 두고 두 식을 x, y에 대해 풀어도 된다. 두 식을 더하면 $6x-6z=12$, 즉 $x=2+t$. 둘째 식에 넣으면 $4y=4-x-3z=2-4t$, 즉 $y=\tfrac{1}{2}-t$로 같은 결과를 얻는다.

비고. 매개변수 표현은 하나로 정해지지 않는다. 다른 점(예: $t=-2$일 때 $(0,\tfrac{5}{2},-2)$)이나 방향벡터 $\langle 24,-24,24\rangle$를 써도 같은 직선이다.

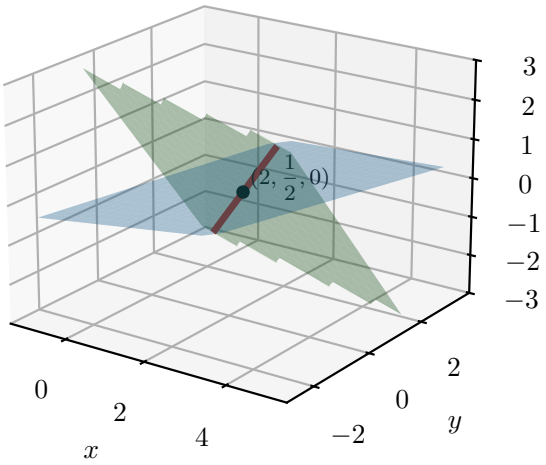

그림 1: 두 평면과 교선(빨강).