주어진 직선을 포함하고 다른 평면에 수직인 평면

두 방향에 수직인 법선벡터 = 벡터곱

공학수학 II · 강의노트 §9.5 Example 풀이

1 문제

직선 $\dfrac{2-x}{3} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z-8}{2}$을 포함하고 평면 $2x - 4y - z + 16 = 0$에 수직인 평면의 방정식을 구한다.

2 풀이

2.1 직선의 점과 방향

대칭방정식을 표준형 $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$로 맞춘다. $\dfrac{2-x}{3} = \dfrac{x-2}{-3}$이므로 직선은 점 $P_0(2,-2,8)$을 지나고 방향벡터는

$$\mathbf{d} = \langle -3,\ 5,\ 2 \rangle$$

이다. (부호에 주의: x의 계수가 -1이므로 방향벡터의 x성분은 $+3$이 아니라 -3이다.)

2.2 구하는 평면의 법선벡터

구하는 평면을 Π, 그 법선벡터를 $\mathbf{n}$이라 하자.

- Π가 직선을 포함하므로 $\mathbf{n} \perp \mathbf{d}$.
- Π가 평면 $2x-4y-z+16=0$에 수직이므로, 그 평면의 법선 $\mathbf{m} = \langle 2,-4,-1 \rangle$은 Π에 평행하다. 따라서 $\mathbf{n} \perp \mathbf{m}$.

그러므로

$$\mathbf{n} = \mathbf{d} \times \mathbf{m} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \big(5(-1) - 2(-4)\big)\mathbf{i} - \big((-3)(-1) - 2\cdot 2\big)\mathbf{j} + \big((-3)(-4) - 5\cdot 2\big)\mathbf{k} = \langle 3,\ 1,\ 2 \rangle.$$

2.3 평면의 방정식

$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$에 $P_0(2,-2,8)$을 넣으면

$$3(x-2) + (y+2) + 2(z-8) = 0.$$

답

$$3x + y + 2z = 20$$

3 확인

- 직선 위의 점 $x = 2-3t,\ y = -2+5t,\ z = 8+2t$를 넣으면 $3(2-3t)+(-2+5t)+2(8+2t) = 20+0\cdot t = 20$. 직선 전체가 평면 위에 있다.
- 두 평면의 법선이 수직: $\langle 3,1,2 \rangle \cdot \langle 2,-4,-1 \rangle = 6-4-2 = 0$.

비고. "평면 Π_1이 평면 Π_2에 수직"이라는 조건은 두 법선벡터가 서로 수직이라는 뜻이다. 법선벡터가 평행하다는 뜻(그러면 두 평면은 평행)과 혼동하지 않도록 주의한다.