

양의 실수 집합 위의 이상한 덧셈

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = xy, \quad k\mathbf{x} = x^k \text{ 인 벡터공간}$$

공학수학 II · 강의노트 §9.6 Example 풀이

1 문제

양의 실수 전체의 집합 V 에서 벡터를 $\mathbf{x} = x$ 로 쓰고, 덧셈과 스칼라곱을

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = xy, \quad k\mathbf{x} = x^k \quad (k \in \mathbb{R})$$

로 정의할 때 V 가 벡터공간인지 판정한다.

2 풀이

벡터공간 공리 10개를 차례로 확인한다. $x, y, z > 0, k, m \in \mathbb{R}$ 이다.

공리	이 연산으로 쓴 식	성립 이유
(i) 덧셈에 닫힘	$xy > 0$	양수의 곱은 양수
(ii) 교환법칙	$xy = yx$	실수 곱셈의 교환법칙
(iii) 결합법칙	$(xy)z = x(yz)$	실수 곱셈의 결합법칙
(iv) 영벡터	$\mathbf{0} = 1: 1 \cdot x = x$	$1 \in V$
(v) 음벡터	$-\mathbf{x} = 1/x: x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \mathbf{0}$	$x > 0$ 이면 $1/x > 0$
(vi) 스칼라곱에 닫힘	$x^k > 0$	양수의 실수 거듭제곱은 양수
(vii) $k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = k\mathbf{x} + k\mathbf{y}$	$(xy)^k = x^k y^k$	지수법칙
(viii) $(k + m)\mathbf{x} = k\mathbf{x} + m\mathbf{x}$	$x^{k+m} = x^k x^m$	지수법칙
(ix) $k(m\mathbf{x}) = (km)\mathbf{x}$	$(x^m)^k = x^{km}$	지수법칙
(x) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$	$x^1 = x$	

답

10개의 공리를 모두 만족하므로 V 는 벡터공간이다. 영벡터는 실수 1, $\mathbf{x}$ 의 음벡터는 $1/x$ 이다.

3 왜 성립하는가: $\ln$ 에 의한 동형

함수 $T(x) = \ln x$ 는 V 를 보통의 실수 벡터공간 $\mathbb{R}$ 로 일대일 대응시키며

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad T(k\mathbf{x}) = \ln x^k = k \ln x$$

를 만족한다. 즉 V 의 “덧셈”과 “스칼라곱”은 $\ln$ 을 거치면 $\mathbb{R}$ 의 보통 덧셈과 곱셈이 된다. V 는 이름만 바꾼 $\mathbb{R}$ 이고, 따라서 1차원 벡터공간이다. 기저로는 1이 아닌 양수 하나, 예를 들어 $\{e\}$ 를 쓸 수 있다($x = (\ln x)e$, 즉 $e^{\ln x} = x$).

비고. V 를 양수가 아닌 모든 실수로 넓히면 공리 (i), (vi)이 깨진다. 예를 들어 $(-1)^{1/2}$ 은 실수가 아니고, 0은 음벡터가 없다.