

주어진 연산으로 벡터공간이 되는가

복소수 집합과 열을 바꾸는 행렬 덧셈

공학수학 II · 강의노트 §9.6 Example 풀이

1 문제

다음 집합이 벡터공간인지 판정한다.

(a) 복소수 $a + bi$ 의 집합. 덧셈 $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, 실수 k 에 대한 스칼라곱 $k(a + bi) = ka + kbi$.

(b) 실수 2×2 배열의 집합. 스칼라곱은 보통과 같고, 덧셈은

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} + b_{12} & a_{11} + b_{11} \\ a_{22} + b_{22} & a_{21} + b_{21} \end{pmatrix}$$

(보통의 합을 구한 뒤 두 열을 바꾼다).

2 (a) 벡터공간이다

$a + bi \leftrightarrow \langle a, b \rangle$ 로 대응시키면 주어진 덧셈과 스칼라곱은 $\mathbb{R}^2$ 의 성분별 덧셈, 스칼라곱과 똑같다.

$$\langle a_1, b_1 \rangle + \langle a_2, b_2 \rangle = \langle a_1 + a_2, b_1 + b_2 \rangle, \quad k\langle a, b \rangle = \langle ka, kb \rangle.$$

$\mathbb{R}^2$ 가 벡터공간이므로 10개 공리가 모두 그대로 성립한다. 영벡터는 $0 + 0i$, $a + bi$ 의 음벡터는 $-a - bi$ 이고, 기저는 $\{1, i\}$, 차원은 2이다.

3 (b) 벡터공간이 아니다

행렬 A 의 두 열을 바꾼 것을 $S(A)$ 라 하면 $A \oplus B = S(A + B)$ 이다.

영벡터가 없다. 모든 A 에 대해 $A \oplus Z = A$ 인 Z 가 있다고 하자. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이면

$$A \oplus Z = \begin{pmatrix} z_{12} & 1 + z_{11} \\ z_{22} & z_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies z_{12} = 1, z_{11} = -1.$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이면 같은 방법으로 $z_{12} = -1$ 이어야 한다. 모순이므로 영벡터가 없다.

결합법칙도 깨진다. S 를 두 번 하면 원래대로 돌아오므로

$$(A \oplus B) \oplus C = S(S(A + B) + C) = A + B + S(C), \quad A \oplus (B \oplus C) = S(A + S(B + C)) = S(A) + B + C.$$

예를 들어 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = C = O$ 이면 앞의 것은 A , 뒤의 것은 $S(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 로 서로 다르다.

(교환법칙 $A \oplus B = B \oplus A$ 와 덧셈·스칼라곱에 닫혀 있다는 성질은 성립한다. 그러나 공리 하나만 깨져도 벡터공간이 아니다.)

답

(a) 벡터공간이다 ($\mathbb{R}^2$ 와 같다). (b) 벡터공간이 아니다 (영벡터가 없고 결합법칙도 성립하지 않는다).

비고. (b)에서 덧셈을 보통의 행렬 덧셈으로 바꾸면 2×2 실수 행렬 전체는 4차원 벡터공간이 된다. “같은 집합”이라도 연산을 어떻게 정의하느냐에 따라 벡터공간이 될 수도, 안 될 수도 있다.