

다항식 공간에서의 Gram-Schmidt 과정

$\{1, x, x^2\}$ 에서 Legendre 다항식으로

공학수학 II · 강의노트 §9.7 Example 풀이

1 문제

2차 이하 다항식의 공간 P_2 에 내적

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx$$

이 주어져 있다. Gram-Schmidt 과정으로 기저 $B = \{1, x, x^2\}$ 를 직교기저 B' 으로 바꾼다.

2 풀이

$\mathbf{u}_1 = 1, \mathbf{u}_2 = x, \mathbf{u}_3 = x^2$ 으로 두고

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle} \mathbf{v}_2.$$

계산에 필요한 적분은 $\int_{-1}^1 x^n dx = \begin{cases} \frac{2}{n+1}, & n \text{ 짝수} \\ 0, & n \text{ 홀수} \end{cases}$ 하나뿐이다.

1단계. $\mathbf{v}_1 = 1, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = \int_{-1}^1 1 dx = 2.$

2단계. $\langle x, 1 \rangle = \int_{-1}^1 x dx = 0$ 이므로 빼 줄 것이 없다.

$$\mathbf{v}_2 = x, \quad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

3단계. $\langle x^2, 1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \langle x^2, x \rangle = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$ 이므로

$$\mathbf{v}_3 = x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 - 0 \cdot x = x^2 - \frac{1}{3}.$$

답

$$B' = \left\{ 1, x, x^2 - \frac{1}{3} \right\}$$

3 확인

$$\left\langle 1, x^2 - \frac{1}{3} \right\rangle = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2 = 0, \quad \left\langle x, x^2 - \frac{1}{3} \right\rangle = \int_{-1}^1 \left(x^3 - \frac{x}{3} \right) dx = 0.$$

또 $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle = \int_{-1}^1 \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} \right) dx = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$. 정규직교기저가 필요하다면 각 원소를 노름으로 나누어

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} x, \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \right\}$$

을 얻는다.

4 Legendre 다항식과의 관계

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{3}{2}(x^2 - \frac{1}{3})$ 이므로 B' 의 원소들은 Legendre 다항식의 상수 배이다(그림 1). $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ 에 같은 과정을 계속하면 모든 Legendre 다항식을 얻는다. 이 다항식들은 §14(타원형 편미분방정식)에서 구면좌표 Laplace 방정식을 풀 때 다시 나온다.

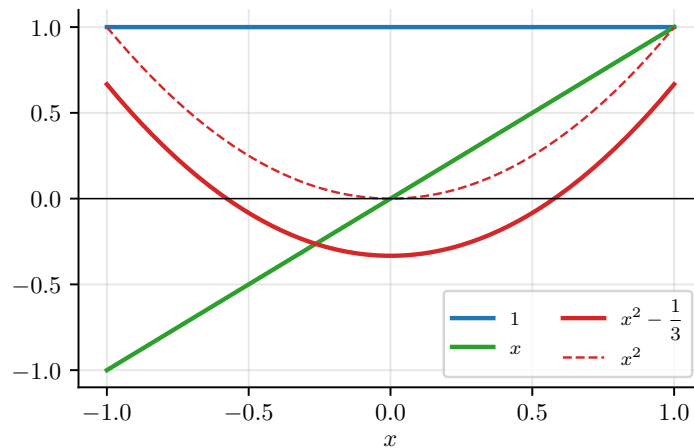


그림 1: 원래 기저(점선)와 직교화된 기저(실선). $x^2 - \frac{1}{3}$ 은 $[-1, 1]$ 에서 평균이 0이 되도록 x^2 를 아래로 내린 것이다.